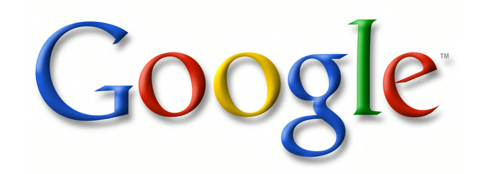
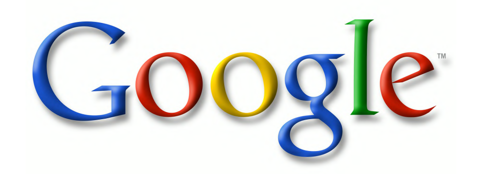





Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Drei und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Berlin, 1842.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des drei und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

Introductio et Argumentum.

1.

Calculum differentialium partialium *d'Alembertus* et *Eulerus* invenere. Cuius primum problemata particularia quaestionum physicarum oblata occasione tractavere. Mox vero *Eulerus* universum illum Calculum ad examen rigorosum vocat, quid in singulis eius partibus praestari possit, quid desideretur exponit eaque ratione novam format disciplinam. Cui ille fere totum *Tomum tertium institutionum Calculi Integralis* dicavit. In tam nova re haud minimum impedimenti quaestioni inerat de classificatione idonea, quid pro primo quid pro secundo statuendum esset, quid simplex quid complicatius; nam ubi tot obstabant difficultates inextricabiles magnum habebatur alias reducere ad alias quae licet et ipsae invictae leviores tamen viderentur. *Eulerus* putabat non ordinem differentialium partialium quae aequationes propositas ingrediuntur genuinum classificationis constituere criterium, nam ordinis secundi aequatio physico problemate oblata omnium prima soluta erat; non gradum aequationis, nam erat ei amplas aequationum non linearium classes solvendi copia dum aequationum *linearium* vel primi ordinis et inter tres variabiles solutionem non in potestate habebat. Praetulit ille eam divisionem tractationis aequationum differentialium partialium quae e numero variabilium petitur. Qua de re aequationes secundi et tertii ordinis inter tres variabiles tractavit antequam aequationes primi ordinis inter quatuor variabiles aggressus est quas etsi lineares sint difficiliores aestimavit. Sane fieri potest ut aliquando aequationum differentialium partialium altiorum ordinum natura melius perspecta *Eulerum* inveniamus in hac re non tam a vero aberravisse siquidem problematum solutionem ad finem ducere proponitur neque

acquiescimus earum reductione ad alia et ipsa inextricabilia. Illo autem tempore sicuti fere nostro aequationes differentiales partiales pro solutis habebantur simulac earum reductio ad aequationes differentiales vulgares contigerit, et hoc quidem respectu *Eulerianam* classificationem novimus valde erroneam esse. Nam pro aequationibus differentialibus partialibus secundi et tertii ordinis vel inter tres variabiles eam reductionem ad aequationes differentiales vulgares difficillimam ac plerumque impossibilem etiam nunc reputamus, reductio autem aequationum differentialium partialium primi ordinis inter quemlibet variabilium numerum constat. Quin etiam, si aequatio differentialis partialis primi ordinis est linearis, eius reductio ad aequationes differentiales vulgares hodie ad prima elementa refertur, dum ea reductio pro aequationibus differentialibus partialibus primi ordinis non linearibus quamvis praestari possit materies tamen difficilis et profunda censeri debet. Quocirca etiam hoc pro progressu in hac theoria habere debemus quod distinguere solemus inter aequationes differentiales partiales lineares et non lineares, quam distinctionem in *Euleriano* Opere non invenimus. Quippe qui aequationes inter quantitates,

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},$$

distinguebat numero harum quantitatum quem aequatio proposita involvit primum de aequationibus quaerens solum alterum differentiale implicantibus, deinde de iis quaerens aequationibus quae praeter utrumque differentiale nullam vel unam vel duas vel omnes tres variabiles x, y, z implicant. Quarum quaestionum primam, secundam, tertiam generaliter absolvit; quartam nonnisi pro aequationibus linearibus et quae ad eas revocari possunt; quintam nonnisi plurimis luculentis exemplis illustravit. Generaliter *Eulerus* reductionem praestitit quoties ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles fieri potuit neque consideratione systematis plurium aequationum differentialium vulgarium simultanearum indigebat. Illa autem exempla ab eo ita exhausta esse videmus ut postea ill. *Lagrange* nonnisi unum vere novum addendum invenerit.*)

III. *Lagrange (Acad. Ber. a. 1779 p. 152—160)* aequationum differentialium partialium primi ordinis linearium solutionem, hoc est reductionem ad aequationes differentiales vulgares primum obiter et adumbrata tantum demonstratione dedit. De illa demonstratione pretiosa alio loco mihi

*) *Acad. Berol. a. 1772 pg. 366.*

agendum erit. Aliam postea dedit demonstrationem in Commentatione,

„Méthode Générale pour intégrer les équations aux différences partielles et du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires,"

*(Acad. Ber. a. 1785 p. 174—190)**). Sed quaeri possit quidnam ea reductione alterius problematis ad alterum lucremur. Dici solet aequationes differentiales vulgares per series infinitas integrari posse, sed idem valet de aequationibus illis differentialibus partialibus. Quae etiam melius per series infinitas directe solvuntur, cum intervenientibus aequationibus differentialibus vulgaribus post earum integrationem per series infinitas effectam insuper adhuc resolutiones aequationum molestissimae vel eliminationes inextricabiles poscantur. Quid? quod methodus generalis aequationes differentiales vulgares per series infinitas integrandi serie *Tayloriana* nititur, series autem *Tayloriana* ipsa nil est nisi aequationis differentialis partialis solutio per seriem infinitam. Tentando autem per Multiplicatores investigandos integrationem finito terminorum numero constantem, e contra aequationes differentiales vulgares ad aequationem differentialem partialem linearem primi ordinis revocantur. Methodi porro particulari problemati solvendo idoneae perinde ex ipsius aequationis differentialis partialis propositae indole atque ex aequationibus differentialibus vulgaribus peti possunt. Nec minus omnia quae spectant solutionis generalis naturam, eius inventionem e solutionibus particularibus, simplificationem per solutiones particulares iam inventas, eadem facilitate

---

*) Observat Cl. *Lacroix* (*T. II. p. 548*), quamvis ill. *Lagrange* revocaverit et aequationes differentiales partiales primi ordinis non lineares inter tres variabiles ad alias lineares inter quatuor et has ad aequationes differentiales vulgares, reductionem tamen aequationum differentialium partialium primi ordinis non linearium inter tres variabiles ad aequationes differentiales vulgares non ei sed Geometrae *Charpit* tribuendam esse. Quod qui lentum ingenii humani progressum ignorat facile mirari possit; nam qui utrumque invenit et $A = B$ et $B = C$, ei vindicari posse videtur inventio esse $A = C$. Sed ill. *Lagrange* ipse illam affirmare videtur sententiam; postquam enim alteram inventionem iam a. 1772, alteram a. 1779 fecerat, tamen a. 1785 in Commentatione citata pro re impossibili habuit quod de ipsius inventionibus tanta facilitate demanat. Etenim l. c. p. 188 aequationem,

$$1 + X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\omega \sqrt{(1 + X^2 + Y^2)} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)},$$

in qua X et Y datas quaslibet ipsarum x, y, z functiones designant, generaliter ait non integrabilem esse *per ullam methodum cognitam*, supponendum esse $\cos\omega = 0$ ut linearis evadat ideoque per methodos ab eo traditas ad aequationes differentiales vulgares revocari possit. Si Commentatio iuvenis praematura morte abrepti a. 1782 Academiae Parisiensi communicata per tot discrimina rerum adhuc conservata est, optandum est ut Cl. *Liouville* eam in insigni cuius publicationi praeest Diario Mathematico collocare atque e scriniis academicis resuscitare velit.

ex ipsis aequationibus differentialibus partialibus concludantur, nullis aequationibus differentialibus vulgaribus intercurrentibus. Quod non dico ut insigni invento aliquid detrahatur, quod suo tempore celeberrimum erat ut quod rem in aprico posuit de qua ipse *Eulerus* desperavit. Quod hic ab ill. *Lagrange* praestitum esse videmus, id semper in rebus mathematicis summum erit, vinculum atque connexionem invenire problematum. Quamquam quod alterius ad alterum reductionem attinet, modo illud ad hoc modo hoc ad illud revocare conveniet. Qua de re mirari non debes quod in hac Commentatione cum mihi disserendum esset de habitu atque natura aequationum quibus integrantur aequationum differentialium vulgarium simultanearum systemata, rationis esse duxi ab aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis proficisci harumque solutioni contra Analyticorum usum illarum integrationem superstruere. Qua in re ill. *Cauchy* mecum consentire videtur.

In aequationibus differentialibus vulgaribus simultaneis plures variabiles pro earum unius functionibus habentur, in aequationibus differentialibus partialibus una variabilis est functio aliarum plurium a se independentium. Functiones unius pluriumve variabilium independentium etiam *variabiles dependentes* vocamus. Aequationes ab omnibus differentialibus vacuas quibus aliae variabiles ab aliis pendent voco aequationes finitas. Quo facilius ipso sermone intelligatur utrae innuantur aequationes differentiales, *integrari* dixi aequationes differentiales ubi sunt vulgares, *solvi* ubi sunt partiales. Ex aequationibus integralibus autem eas pro ceteris distinxi iisque *Integralium* nomen imposui quae differentiatae per aequationes differentiales vulgares propositas identicae fiunt, nullis in auxilium vocatis aequationibus finitis. Integrationem functionis unius variabilis, sicuti saepius quamvis improprie fit, appellavi *Quadraturam*. Differentiale functionis plurium variabilium quae inter differentiandum omnes pro earum unius functionibus habentur differentiale *completum* dixi, quo distinguatur a differentiali partiali sive unius respectu variabilis ita sumto ut reliquae inter differentiandum pro Constantibus habeantur. Differentiationem vulgarem symbolo indicavi

$$d,$$

dum differentiationi partiali symbolum

$$\partial$$

adhibui. Si certae variabilium independentium functiones ipsae pro variabilibus independentibus sumuntur earumque respectu differentiationes partiales instituuntur, haec nova differentialia partialia uncis inclusi ut a differen-

tialibus partialibus variabilium independentium propositarum respectu sumtis distinguerentur.

In hac Commentatione saepius de functionibus atque aequationibus a se independentibus sermo est. De quibus haec adnoto, Functiones plurium variabilium a se independentes sunt si nulla inter eas locum habet aequatio identica ab ipsis variabilibus vacua. Si functiones plura implicant quantitatum systemata, a, a_1 etc., b, b_1 etc., eas *ipsarum* a, a_1 *etc. respectu* a se independentes dico, si nulla inter functiones eas aequatio extat identica ab omnibus a, a_1 etc. vacua, quamvis quantitatibus b, b_1 etc. affecta. Si habentur m functiones n quantitatum a, a_1 etc. respectu a se independentes, fieri debet $n \geqq m$, ac semper e numero quantitatum a, a_1 etc. dabuntur m quae per reliquas ipsasque m functiones exprimi possint, unde semper etiam loco m quantitatum a, a_1 etc. ipsae m functiones pro variabilibus sumi possunt independentibus, quas tamen m quantitates ex ipsarum a, a_1 etc. numero non semper ex arbitrio eligere licet. *Aequationes* m inter n quantitates a, a_1 etc. propositas a se independentes dico eas quarum ope possunt m e quantitatum a, a_1 etc. numero per reliquas quantitates quas aequationes implicant determinari. Ex illis igitur aequationibus non fieri potest ut omnes simul quantitates a, a_1 etc. eliminentur atque aequatio proveniat inter alias quas aequationes implicare possunt quantitates b, b_1 etc. ab omnibus a, a etc. vacua. Vide de his rebus Comm. „*De Determinantibus functionalibus*" Diario Crelliano Vol. XXII. Fasc. IV. insertam.

Est Propositio gravissima Calculi Differentialis, functiones aequationibus differentialibus determinatas semper plures involvere posse variabiles quam aequationes differentiales quibus determinantur. Quae variabiles illis quas aequationes differentiales implicant accedentes vocantur ab Analyticis *Constantes arbitrariae,* Constantes scilicet quia earum variabilitatis in aequationibus differentialibus propositis respectus non habetur, atque Arbitrariae quippe quae ad eas non pertinent quantitates constantes quae ipsas aequationes differentiales afficiunt propositas. Quamlibet autem quantitatem aequationes differentiales ingredientem pro Constante habemus quamvis alias variabilem, cuius respectu in iis quidem aequationibus nulla differentiatio instituitur. Eiusmodi Constans ipsas quoque functiones per integrationem determinandas afficit, sed quamvis sit indefinita non vocabitur arbitraria quia in functionibus quaesitis ei non valor arbitrarius sed idem ei valor suppetit atque in aequationibus differentialibus propositis.

Si x variabilium independentium x_1, x_2 .... x_n functio est, generalius dici potest quantitatum $x, x_1 .... x_n$ unam quamlibet reliquarum functionem esse seu inter omnes extare aequationem $f=0$. Qua de re functionis x loco quaeri potest illa functio f atque differentialium ipsius x partialium loco introduci possunt functionis f differentialia partialia. Hac ratione ex aequatione inter variabiles $x, x_1 .... x_n$ ipsiusque x differentialia partialia proposita prodit alia inter x, x_1 .... x_n atque functionis quaesitae f differentialia partialia. Sed non necessarium erit ut ea aequatio per se spectata locum habeat sed tantum opus est ut valeat quoties inter x, x_1 .... x_n habetur aequatio $f=0$. Cui incommodo obvenitur atque obtinetur aequatio differentialis quae nulla alia advocata aequatione finita, locum habere debet, si ponimus functionem quaesitam x involvere aliquam Constantem Arbitrariam α atque aequatione,

$$x = \Phi(x_1, x_2 .... x_n, \alpha),$$

ipsius α respectu resoluta aequationem inter x, x_1 .... x_n quaesitam exhibemus per $f=\alpha$, ipsa f Constante Arbitraria α prorsus vacante. Ex aequatione $f=\alpha$ sequitur,

$$1. \quad \frac{\partial x}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

quibus formulis substitutis obtinetur aequatio transformata. Quae cum ipsam α non implicet etiam non advocata aequatione $f=\alpha$ valere debet. Nam hoc ut principium tenendum est, si m aequationibus inter variabiles a, a_1 etc. aliasque b, b_1 etc. propositis possint m quantitatum a, a_1 etc. per reliquas determinari, aequationem aliquam ab omnibus a, a_1 etc. vacuam necessario identicam esse. Nisi enim identica esset, aequationi inter solas variabiles, b, b_1 .... eo satisfieret quod aliae quantitates a, a_1 etc. eam aequationem non afficientes certis ipsarum b, b_1 etc. functionibus aequantur, quod absurdum est. Ita ubi inter x, x_1 .... x_n atque functionis f differentialia partialia locum habet aequatio ex aequatione quidem $f=\alpha$ differentiatione deducta, ab ipsa autem α vacua, ea identica esse debet; neque enim alicui inter solas x, x_1 .... x_n relationi eo satisfieri potest quod earum variabilium functio novae quantitati α aequatur.

Aequatio differentialis partialis linearis primi ordinis inter $n+1$ va-

riabiles x, x_1 .... x_n forma gaudet sequente,

$$2. \quad X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

designantibus X, X_1 etc. ipsarum x, x_1 .... x_n functiones. Cuius solutio si ponitur dari aequatione $f = \alpha$, transformatur aequatio praecedens in hanc,

$$3. \quad 0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

cuius indolem facilius perspicere licet quam aequationis (2.). Semper ei aequationi satisfit ponendo $f = Constans$, sed eam inter solutiones non refero. Exceptionis tantum locum erit si unica adest variabilis x, quo casu aequatio,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

solam habet solutionem $f = Constans$, hoc est f vacuam esse a variabili x, quamvis alias implicare possit variabiles quae in ea aequatione differentiali Constantium vicem gerunt. Ut indagatur natura solutionis maxime generalis qua aequatio (3.) gaudere potest proficisci debemus a propositione, quam nisi ut Postulatum ponere placet per series infinitas demonstrare licet, *aequationem* (3.) *si* $n > 0$ *omnino aliquam habere solutionem praeter Constantem.* Hoc uno probato sive concesso demonstrari potest aequationem (3.) gaudere n solutionibus a se independentibus iisque inventis solutionem generalem earum esse functionem arbitrariam.

Docet aequatio (3.), per aequationes quascunque finitas quae satisfaciant aequationibus differentialibus vulgaribus simultaneis,

$$4. \quad dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n,$$

et per quas quantitates,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

non infinite magnae evadant, evadere f Constanti aequalem. Qua Propositione integratio systematis aequationum differentialium vulgarium simultanearum intime connectitur cum solutione aequationis differentialis partialis linearis primi ordinis. Aequando enim aequationis (3.) solutiones n a se independentes f_1, f_2 .... f_n Constantibus Arbitrariis α_1, α_2 .... α_n obtinentur aequationes,

$$5. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

quae sunt maxime generales quibus aequationes differentiales vulgares (4.) integrare licet.

Quamvis aequationes (4.) tantum differentialia prima implicent, ad earum tamen formam revocari possunt aequationes differentiales vulgares differentialia cuiuscunque ordinis implicantes, ipsa differentialia praeter altissima quaeque pro novis variabilibus dependentibus introducendo. Quod immediate fit si ita comparatae sunt aequationes differentiales propositae ut differentialia altissima singula per ipsas variabiles atque inferiorum ordinum differentialia exprimi possint, sive ut ex iis nullam deducere liceat aequationem ab omnibus simul differentialibus altissimis vacuam. Scilicet quoties aequationes differentiales vulgares revocari possunt ad formam sequentium,

$$6.\quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B \text{ etc.},$$

in quibus expressiones A, B etc. non altioribus afficiuntur ipsarum x, y etc. differentialibus quam respective $(p-1)^{\text{to}}$, $(q-1)^{\text{to}}$ etc., earum locum tenent aequationes differentiales primi ordinis forma aequationum (3.) gaudentes inter variabiles $1+p+q+$ etc.,

$$t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2}\ \dots\ \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}},\ y,\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2}\ \dots\ \frac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}} \text{ etc.}$$

Quarum aequationes integrales maxime generales implicabunt Constantes Arbitrarias $p+q+$ etc. Per differentiationes et eliminationes aequationes (6.) in alias transformare licet quibus eadem forma est sed aliis altissimorum differentialium ordo ita tamen ut altissimorum ordinum summa $p+q+$ etc. immutata maneat. Poterunt exempli gratia aequationes (6.) in alias transformari quarum una est aequatio differentialis $(p+q+\dots)^{\text{ti}}$ ordinis inter x et t, reliquis autem ipsae variabiles y etc. per

$$t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \dots\ \frac{d^{p+q-1}x}{dt^{p+q-1}}$$

exprimuntur. Dicere conveniet eiusmodi systema aequationum differentialium (6.) $(p+q+\dots)^{\text{ti}}$ ordinis esse, qui systematis ordo idem erit atque numerus Constantium Arbitrariarum quibus aequationes integrales maxime generales afficiuntur. Si aequationes differentiales propositae non per solas eliminationes ad formam aequationum (6.) revocari possunt, id semper per differentiationes advocatas praestari potest. Quae quales fieri debeant differentiationes sine magno negotio singulis casibus cognoscitur. Sed ea res per praecepta generalia non ita facile absolvi posse videtur; qua de re se-

lutio generalis problematis, *systematis aequationum differentialium vulgarium simultanearum ordinem determinare*, adhuc in desiderio est.

Aequationes (5.), quibus systema aequationum differentialium vulgarium (4.) integratur, earum dicuntur aequationes integrales *completae*, quas videmus affici n Constantibus Arbitrariis. At si dicitur aequationes integrales completas esse eas quae n Constantes Arbitrarias involvunt, tacite subintelligendum est, non posse Constantes Arbitrarias ad minorem numerum revocari, aequationes idonee inter se combinando atque certas quasdam Constantium Arbitrariarum functiones pro ipsis Constantibus Arbitrariis in aequationibus transformatis introducendo. Aequationibus integralibus completis sic definitis semper Constantes Arbitrariae per variabiles x, x_1 .... x_n exprimi possunt, sive iis conciliari potest forma aequationum (5.); simul functiones f_1, f_2 .... f_n, resolutione aequationum integralium provenientes, solutiones erunt a se independentes aequationis differentialis partialis (3.). Neque ex aequationibus integralibus completis deduci potest aequatio finita ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacua. Quae est magni momenti propositio; quoties enim ab aequationibus integralibus completis profecti ad talem pervenimus aequationem, tuto concludere licet eam identicam esse.

Est gravissima propositio quae ex antecedentibus sequitur, unicum extare aequationum integralium completarum systema, ex eoque provenire alia omnia aequationum integralium systemata, Constantes Arbitrarias quas involvit idonee determinando seu per alias Constantes Arbitrarias exprimendo. Cuius rei singularibus tantum casibus exceptiones quaedam obvenire possunt, de quibus in hac quidem Commentatione non agam. Propositis igitur inter $n+1$ variabiles n aequationibus finitis, ex his quidem varia systemata n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis derivari possunt pro variis mutationibus quas per ipsas n aequationes finitas expressiones differentiationibus prodeuntes subire possunt, atque varia illa aequationum differentialium systemata complete integrabuntur aequationum finitarum systematis maxime inter se diversis. Fieri tamen debet, ut illa aequationum finitarum systemata quamvis inter se diversa in ipsas aequationes propositas simul omnia redire possint, Constantes Arbitrarias quas involvunt idonee determinando.

Cum n Constantium Arbitrariarum quas aequationes integrales completae involvunt functiones n quaecunque a se independentes pro ipsis Constantibus Arbitrariis sumi possint, caeteris memorabilis est electio Constantium Arbitrariarum quae variabilium x_1, x_2 .... x_n aequales sunt valoribus

initialibus x_1^0, x_2^0 .... x_n^0, ipsi $x = x^0$ respondentibus. Proveniunt ea ratione n aequationes inter duo quaecunque systemata valorum simultaneorum variabilium, x^0, x_1^0 .... x_n^0 atque x, x_1 .... x_n, quorum alterum si valores *initiales* appellavimus, alterum valores *finales* vocare licet. Aequationibus integralibus completis ita expressis, in unaquaque aequatione quantitates x, x_1 .... x_n respective cum x^0, x_1^0 .... x_n^0 commutare licet, quippe qua commutatione aut aequatio immutata manebit aut in aliam abibit quae et ipsas ad aequationem integralium completarum systema pertinet. Sunt duae maxime formae quibus aequationes integrales completae proponi solent, sive functiones solarum variabilium exhibentur quae Constantibus Arbitrariis aequales fiunt, sive variabiles omnes per earum unam atque Constantes Arbitrarias exprimuntur. Molestae in genere requiruntur eliminationes ut altera forma ex altera eruatur. Quoties autem Constantes Arbitrariae sunt ipsi variabilium valores initiales, omnino nulla eliminatione opus est, sed sola illa variabilium cum valoribus earum initialibus commutatione altera forma in alteram abit.

Antecedentibus supponitur indefinitum manere ipsius x valorem x^0 cui variabilium x_1, x_2 .... x_n valores initiales respondent. Quod si ponimus, implicant aequationes integrales Constantes Arbitrarias $n+1$ ideoque numerum unitate maiorem quam completa integratio poscit. Nihil autem impedit quia aequationes integrales quemcunque Constantium Arbitrariarum numerum involvant, quas in singulis quidem aequationibus nullo modo ad minorem numerum revocare liceat. Quamquam constat si *cunctae simul* considerentur aequationes integrales, semper iis eam conciliari posse formam in qua Constantes Arbitrariae ad numerum revocari possint ipsum n non excedentem. Memoratu autem dignum est, eam aequationum integralium formam, qua variabiles omnes per earum unam exprimuntur, ita comparatam esse ut singulae aequationes non plures quam n Constantes Arbitrarias involvant, vel si plures involvere videantur, semper eae ad numerum ipso n non maiorem revocari possint. Expressa enim x_1 per x et Constantes Arbitrarias, sane patet Constantium Arbitrariarum non fieri posse reductionem eo quod aliae quantitates x_2, x_3 etc. certis ipsius x et Constantium Arbitrariarum functionibus aequentur. Unde reductio illa Constantium Arbitrariarum ad numerum ipso n non maiorem, cum semper fieri possit, in singulis aequationibus illis fieri debet.

Haec Commentatio plurima est in tractandis quaestionibus quae esse offerunt si ex aequationum integralium numero una aliqua proponitur, vide-

licet quodnam sit aequationum integralium systema maxime generale ad quod ea aequatio pertinere possit, quaenam inter Constantes Arbitrarias quas systema completum involvit intercedere debeant relationes ut aequatio illa si particularis est obtineatur, an Constantes Arbitrarias involvat supervacamus et quinam earum numerus sit. Qua in re primum observari debet ex una aequatione integrali proposita plures alias derivari posse et interdum totum aequationum integralium systema, ipsam propositam differentiando atque differentialia aequationum differentialium propositarum ope eliminando. Nam datis aequationibus differentialibus,

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

ex aequatione integrali $u = 0$ sequitur

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Ex hac aequatione eadem methodo tertia derivari potest ut ita porro. Numerus aequationum quae ea ratione obtinentur ipsum n non excedere debet; alioquin enim proposita $u = 0$ non foret aequatio integralis. Sit numerus ille ad quem ipsa quoque proposita referatur, $m \leqq n$, ita ut e proposita non $m+1$ derivari possint aequationes a se independentes ideoque aequationes finitae quae obtinentur differentiando illas m aequationes et aequationes differentiales substituendo, in ipsas m aequationes redeant. Quibus positis habetur propositio in hac re fundamentalis, *eiusmodi m aequationes in alias m transformari posse inter solas $f_1, f_2 \dots f_n$* i. e. *inter solas solutiones aequationis differentialis partialis,*

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Si aequatio proposita non involvit Constantes Arbitrarias, obtinentur ea ratione m aequationes particulares inter Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, quas implicant aequationes integrales completae

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad f_n = \alpha_n.$$

Si proposita et ipsa Constantes Arbitrarias β_1, β_2 etc. involvit, quaeritur an ex illis m aequationibus Constantes Arbitrariae β_1, β_2 etc. omnes eliminari possint, an numerus earum m per reliquas ipsasque $f_1, f_2 \dots f_n$ determinetur. Illud usu venit quoties ipsarum β_1 etc. numerus ipso m minor est, sed etiam evenire potest si ille numerus ipsum m aut aequat aut adeo superat. Ponamus m aequationibus illis ipsarum β_2 etc. numerum $i \leqq m$ deter-

minari per aequationes,

$$6. \quad \beta_1 = \Phi_1, \quad \beta_2 = \Phi_2, \quad \ldots . \quad \beta_i = \Phi_i,$$

ac praeterea obtineri $m-i$ aequationes inter solas f_1, $f_2 \ldots . f_n$. Si $i < m$, erit proposita aequatio integralis particularis atque ponendae erunt inter n Constantes Arbitrarias α_1 etc. $m-i$ relationes particulares ut proposita ex aequationibus integralibus completis obtineatur. Si proposita praeter ipsas β_1, $\beta_2 \ldots . \beta_i$ aliis afficitur Constantibus Arbitrariis β_{i+1}, β_{i+2} etc., eae pro *supervacaneis* haberi possunt iisque salva generalitate valores tribui possunt determinati. Ope m aequationum integralium inventarum expressis

$$X, \; X_1 \; \ldots . \; X_{n-m}$$

per solas x, $x_1 \ldots . x_{n-m}$, integrentur aequationes differentiales,

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_{n-m} = X : X_1 \ldots . : X_{n-m};$$

earum aequationes integrales completae, implicantes $n-m$ Constantes Arbitrarias novas ab ipsis β_1, β_2 etc. independentes, una cum m aequationibus illis differentiatione ex ipsa proposita inventis constituunt systema aequationum integralium maxime generale ad quod proposita pertinere potest. Si $i = m$, proposita pertinere potest ad aequationum integralium completarum systema et vice versa si proposita ad aequationum integralium completarum systema pertinet, necessario erit $i = m$. Eo casu functiones $\Phi_1, \Phi_2 \ldots . \Phi_m$, per formulas (6.) inventae, solutiones sunt aequationis differentialis partialis (3.),

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Unde *si ex aequationum integralium completarum systemate vel una tantum aequatio quaecunque datur, ex ea nisi aequationis differentialis partialis solutio generalis, semper tamen una pluresve solutiones particulares peti possunt.* Si aequatio proposita ea est qua variabilium functio aliqua a Constantibus Arbitrariis vacua per unam variabilium exprimitur, nullis ea afficitur Constantibus Arbitrariis *supervacaneis* Si eiusmodi aequatio e numero aequationum integralium *completarum* petita est, ex ea tot derivari possunt aequationes integrales quot eam Constantes Arbitrariae afficiunt, totidemque habentur aequationis differentialis partialis (3.) solutiones. Neque nullus est Constantium Arbitrariarum supervacanearum usus, quippe quae si adsunt inservire possunt novis aequationibus integralibus inveniendis ad quas methodo tradita per solam differentiationem propositae iteratam non pervenitur. Ponamus propositam $u = 0$ ad aequationes integrales completas pertinere atque involvere Constantes Arbitrarias β_1, $\beta_2 \ldots . \beta_{s+1}$, quarum

una supervacanea, ex ea deduci potest haec altera aequatio integralis,

$$7.\quad \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \beta_1} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \dots + \gamma_{n+1} \frac{\partial u}{\partial \beta_{n+1}} = 0,$$

in qua γ_1, γ_2 etc. sunt quantitates constantes. Si plures quam $n+1$ Constantes Arbitrariae aequationem propositam afficiunt, eiusmodi dabuntur aequationes pro quibuslibet $n+1$ ex earum numero; e quibus deinde eodem modo aliae complures deduci possunt. Si Constantes Arbitrariae quibus proposita $u=0$ afficitur sunt variabilium valores initiales x^0, $x_1^0 \dots x_n^0$, quarum una supervacanea, habetur nova aequatio integralis,

$$8.\quad X^0 \frac{\partial u}{\partial x^0} + X_1^0 \frac{\partial u}{\partial x_1^0} \dots + X_n^0 \frac{\partial u}{\partial x_n^0} = 0,$$

designantibus X^0, X_1^0 etc. quantitatum X, X_1 etc. valores initiales.

Proposito systemate m aequationum finitarum ita comparato ut aequationibus differentiatis eliminatisque differentialibus ope aequationum,

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

aliae non proveniant aequationes finitae nisi quae in propositas redeunt seu earum combinatione obtinentur: extat proprium aequationum differentialium partialium systema cuius solutio aequationibus illis continetur. Habeatur una aequatio e qua ratione indicata non alia nova derivari possit, eius ope expressa x per x_1, $x_2 \dots x_n$, valebit aequatio differentialis partialis,

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \dots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n};$$

proponantur m aequationes e quibus dicta ratione aliae novae non derivari possint, earum ope expressis x, $x_1 \dots x_{m-1}$ per reliquas variabiles x_m, $x_{m+1} \dots x_n$, valebunt m aequationes differentiales partiales simultaneae,

$$9.\quad \left\{ \begin{array}{l} X = X_m \frac{\partial x}{\partial x_m} + X_{m+1} \frac{\partial x}{\partial x_{m+1}} \dots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} \\ X_1 = X_m \frac{\partial x_1}{\partial x_m} + X_{m+1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} \dots + X_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{m-1} = X_m \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_m} + X_{m+1} \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_{m+1}} \dots + X_n \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_n}; \end{array} \right.$$

si habentur n aequationes finitae e quibus dicta methodo non $n+1^{\text{ta}}$ obtineri possit aequatio, ex iis sequuntur ipsae aequationes differentiales vulgares propositae,

$$X_1 = X \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad X_2 = X \frac{\partial x_2}{\partial x}, \quad \dots \quad X_n = X \frac{\partial x_n}{\partial x}.$$

Vice versa solutio maxime generalis aequationum differentialium partialium simultanearum (9.) continetur eiusmodi m aequationibus quibuscunque. Quae obtinentur inter functiones $f_1, f_2 \dots f_n$ ponendo m aequationes arbitrarias.

Problema inveniendi functionem f quae satisfaciat aequationi differentiali partiali

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

etiam sic proponi potest ut indagentur n Multiplicatores,

$$M_1, \quad M_2 \quad \dots \quad M_n,$$

qui expressionem,

$$M_1\left\{dx_1 - \frac{X_1\,dx}{X}\right\} + M_2\left\{dx_2 - \frac{X_2\,dx}{X}\right\} \dots + M_n\left\{dx_n - \frac{X_n\,dx}{X}\right\},$$

integrabilem reddant. Quod pro tribus quidem variabilibus iam *Eulerus* observavit. Ut expressio eiusmodi,

$$M\,dx + M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2 \dots + M_n\,dx_n,$$

sit integrabilis, fieri debet pro indicum i et k valoribus 0, 1, 2 .... n,

$$10. \quad \frac{\partial M_k}{\partial x_i} = \frac{\partial M_i}{\partial x_k}.$$

Quae aequationes conditionales numero $\frac{n(n+1)}{2}$ si locum habent, ipsum expressionis integrale f invenitur per n Quadraturas, idque variis methodis possit. Sive enim Quadraturae illae seorsim institui possunt, sive aliae post alias, ita ut quaelibet antecedentes iam transactas supponat. Posterior methodus minus commoda pro tribus quidem variabilibus in libris elementaribus circumferri solet.

Determinata M per aequationem,

$$M = -\frac{1}{X}\{X_1 M_1 + X_2 M_2 \dots + X_n M_n\},$$

cum satisfaciendum sit omnibus aequationibus (10.), problema videtur superdeterminatum, quia functiones n satisfacere debent $\frac{n(n+1)}{2}$ conditionibus. Sed in auxilium venit aequatio identica,

$$11. \quad \frac{\partial\left\{\frac{\partial M_k}{\partial x_l} - \frac{\partial M_l}{\partial x_k}\right\}}{\partial x_i} + \frac{\partial\left\{\frac{\partial M_l}{\partial x_i} - \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right\}}{\partial x_k} + \frac{\partial\left\{\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i}\right\}}{\partial x_l} = 0,$$

quae docet ubi identice fiat,

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial M_i}{\partial x_l} - \frac{\partial M_l}{\partial x_i} = 0,$$

expressionem

$$\frac{\partial M_k}{\partial x_l} - \frac{\partial M_l}{\partial x_k}$$

variabili x vacare ideoque generaliter evanescere si demonstratum sit eam evanescere tributo ipsi x valore particulari. Qua re fieri posse ut omnibus conditionibus (10.) per n functiones $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ idonee determinatas satisfiat, per series infinitas demonstravi in quas Multiplicatores propositos evolvi.

Pauca sub finem adieci de transformatione systematis aequationum differentialium vulgarium

$$dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n,$$

in unicam aequationem differentialem n^{ti} ordinis inter duas variabiles. Ex arbitrio sumtis duabus functionibus u et v, positoque pro qualibet functione U,

$$[U] = X\frac{\partial U}{\partial x} + X_1\frac{\partial U}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial U}{\partial x_n},$$

formetur series expressionum

$$u' = \frac{[u]}{[v]}, \quad u'' = \frac{[u']}{[v]}, \quad \ldots\ldots \quad u^{(n)} = \frac{[u^{(n-1)}]}{[v]}.$$

Exprimatur $u^{(n)}$ per $n+1$ quantitates

$$v, u, u', u'' \ldots\ldots u^{(n-1)},$$

ope aequationis,

$$u^{(n)} = \Omega(v, u, u' \ldots\ldots u^{(n-1)});$$

valebit pro quacunque functione f formula,

$$12. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} =$$
$$[v]\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + u'\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + u''\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right) \ldots\ldots + u^{(n-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(n-2)}}\right) + \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(n)}}\right)\right\}.$$

Unde aequatio differentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

transformari poterit in hanc,

$$\frac{\partial f}{\partial v} + u'\frac{\partial f}{\partial u} + u''\frac{\partial f}{\partial u'} \ldots\ldots + u^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial u^{(n-2)}} + \Omega\frac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}} = 0,$$

in qua expressiones in differentialia functionis quaesitae ducta sunt ipsae variabiles praeter Coëfficentem primum et ultimum quorum ille unitas, hic data omnium variabilium functio est. Per easdem formulas, si aequationis differentialis partialis loco proponis systema aequationum differentialium vul-

garium intime cum ea connexo, aequationes differentiales vulgares simultaneae

$$dx:dx_1:dx_2 \;\ldots.\; :dx_n = X:X_1:X_2 \;\ldots.\; :X_n,$$

redeunt in has,

$$dv:du:du' \;\ldots.\; :du^{(n-2)}:du^{(n-1)} = 1:u':u'' \;\ldots.\; :u^{(n-1)}:\Omega,$$

quibus substitui unica potest aequatio differentialis n^{ti} ordinis inter duas variabiles u et v,

$$\frac{d^n u}{d^n v} = \Omega\left(v,\, u,\, \frac{du}{dx},\, \frac{d^2 u}{dx^2},\, \ldots.\, \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}\right).$$

Quarum rarior usus est transformationum propter eliminationes quae requiruntur inextricabiles, qua de re in hac Commentatione formam *systematis* aequationum differentialium vulgarium primi ordinis conservare praetuli, qua nuper etiam ill. *Cauchy* usus est in variis ea de re scriptis partim lapide partim typis expressis.

De aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis.

2.

Vocatur aequatio differentialis partialis quae est inter functionem plurium variabilium independentium quaesitam, ipsas illas variabiles et differentialia partialia functionis illarum respectu variabilium sumta. Quae differentialia partialia, si non altioris quam primi ordinis sunt, aequatio differentialis partialis primi ordinis esse dicitur. Ac vocatur *linearis* quoties in ea differentialia partialia dimensionem primam non transcendunt. Sit igitur x functio quaesita n variabilium independentium,

$$x_1,\, x_2,\, \ldots.\, x_n,$$

aequatio differentialis partialis primi ordinis maxime generalis hac forma gaudet,

$$1.\quad 0 = F\left(x,\, x_1,\, x_2 \,\ldots.\, x_n,\, \frac{\partial x}{\partial x_1},\, \frac{\partial x}{\partial x_2},\, \ldots.\, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right).$$

Quae aequatio, si linearis est, gaudebit forma sequente,

$$2.\quad X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \,\ldots.\, + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

in qua aequatione sunt X, X_1 etc. datae ipsarum x, $x_1 \ldots. x_n$ functiones quaecunque.

Variabilium independentium unamquamque pro dependente sumere licet dum dependens sive functio quaesita independentium numero accedit.

Nam si x ipsarum x_1, x_2 .... x_n functio est, generalius dici potest, ipsarum x, x_1 .... x_n quamlibet reliquarum esse functionem. Quoties enim x ipsarum x_1, x_2 etc. functio est, certa aequatio locum habebit inter quantitates x, x_1, x_2 etc. quarum una quaelibet si pro incognita sumitur eiusque respectu aequatio resolvitur, ea variabilis per reliquas expressa prodibit. Ut eruantur mutationes quas formulae differentiales subire debent introducendo ipsius x loco aliam variabilem x_i pro dependente, aequationem

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}dx_2 \dots + \frac{\partial x}{\partial x_n}dx_n,$$

sic exhibeo,

$$\frac{\partial x}{\partial x_i}dx_i = dx - \frac{\partial x}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial x}{\partial x_2}dx_2 \dots - \frac{\partial x}{\partial x_n}dx_n,$$

omisso in dextra aequationis parte termino per dx_i multiplicato. Hac formula cum sequente comparata,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x}dx + \frac{\partial x_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial x_i}{\partial x_2}dx_2 \dots + \frac{\partial x_i}{\partial x_n}dx_n,$$

in qua x_i pro variabili dependente habetur, obtinetur,

$$3.\quad \frac{\partial x_i}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial x_i}} \quad \text{sive} \quad \frac{\partial x}{\partial x_i} = \frac{1}{\frac{\partial x_i}{\partial x}};$$

porro si x_k variabilium quamcunque praeter x et x_i designat,

$$4.\quad \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial x_k}}{\frac{\partial x}{\partial x_i}},$$

unde e (3.)

$$5.\quad \frac{\partial x}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}{\frac{\partial x_i}{\partial x}}.$$

Formulae (3.) et (5.) in aequationibus (1.) substituendae sunt ut transformentur in alias in quibus x_i variabilis dependens fit, dum x variabilibus independentibus accedit.

Aequationem (2.) sic exhibeamus,

$$X_i\frac{\partial x}{\partial x_i} = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} \dots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

omisso in dextra aequationis parte termino in X_i ducto. Si in aequatione

praecedente substituuntur formulae (3.), (5.), atque per $\frac{\partial x_i}{\partial x}$ multiplicatio instituitur, prodit

$$X_i = X\frac{\partial x_i}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial x_i}{\partial x_n},$$

omisso rursus in dextra aequationis parte termino in X_i ducto. Hinc in aequatione lineari proposita (2.) quamlibet variabilium $x, x_1 \dots x_n$ Permutationem facere licet, dummodo quantitates $X, X_1 \dots X_n$ simili ratione inter se permutantur.

3.

Variabilium numerum independentium unitate augendo aequatio differentialis partialis primi ordinis quaecunque commutari potest in aliam quam functio quaesita non ipsa ingreditur sed tantum praeter variabiles independentes differentialia functionis quaesitae partialia, quae porro aequatio horum respectu differentialium partialium homogenea est. Supponamus enim aequationis (1.) §. pr. solutionem x *unam* saltem involvere *Constantem Arbitrariam* α, hoc est, si placet, novam variabilem independentem quae in differentiationibus ipsius x singularum $x_1, x_2, \dots x_n$ respectu instituendis pro Constante habetur et quae in ipsa aequatione proposita non invenitur. Statuendo x ipsarum $x_1, x_2, \dots x_n, \alpha$ functionem esse, etiam α pro ipsarum $x, x_1, x_2, \dots x_n$ functione habere licet,

$$1. \quad \alpha = f(x, x_1, x_2, \dots x_n),$$

et vice versa hac functione f cognita per resolutionem aequationis (1.) obtines functionem quaesitam x. Quaeramus igitur illam functionem f, eamque ut functionem incognitam in aequatione differentiali proposita (1.) §. pr. introducamus. Cum in formandis differentialibus $\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}$, etc. habeatur α pro Constante, fit, differentiando aequationem (1.) ipsius x_i respectu,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

unde

$$2. \quad \frac{\partial x}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

vel adhibendo *Lagrangianam* notationem,

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = -\frac{f'(x_i)}{f'(x)}.$$

Substituendo ipsarum $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial x_2}$ etc. expressiones quas formula praecedens suppeditat, abit aequatio (1.) pr. in hanc:

$$3.\quad 0 = F\left(x,\ x_1 \ldots . x_n,\ -\frac{f'(x_1)}{f'(x)},\ -\frac{f'(x_2)}{f'(x)}\ \ldots .\ -\frac{f'(x_n)}{f'(x)}\right).$$

In hac aequatione est f functio quaesita dum x variabilibus accedit independentibus, quarum igitur numerus unitate maior fit quam in aequatione proposita; porro aequatio (3.) ipsam quaesitam functionem f non continet sed praeter variabiles independentes x, $x_1 \ldots . x_n$ sola ipsius f differentialia partialia $f'(x)$, $f'(x_1)$, etc.; denique aequatio (3.) horum differentialium partialium respectu est homogenea, ut quam solae rationes ingrediuntur quas differentialia illa partialia inter se tenent.

Si ipsa aequatio proposita (1.) differentialium $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial x_2}$, etc. respectu homogenea est, non aucto variabilium numero aequatio proposita in aliam mutari potest ab ipsa functione quaesita vacuam. Videlicet eiusmodi aequationem homogeneam ita exhibere licet ut praeter variabiles dependentem et independentes solummodo illorum differentialium partialium per eorum unum divisorum Quotientes contineat. Obtinemus autem e (2.) binorum differentialium $\frac{\partial x}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x}{\partial x_k}$ Quotientem,

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial x_i}}{\frac{\partial x}{\partial x_k}} = \frac{\frac{df}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_k}},$$

unde aequatio proposita per transformationem adhibitam non subit mutationem aliam nisi quod cuique differentiali partiali $\frac{\partial x}{\partial x_i}$ substituatur functionis f differentiale eiusdem variabilis respectu sumtum $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Hinc aequatio transformata et ipsa differentialium $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ .... $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ respectu fit homogenea, a differentiali $\frac{\partial f}{\partial x}$ autem prorsus immunis. Sed est principium generale bene tenendum, in solvendis aequationibus differentialibus partialibus propositis quas differentialia certae respectu variabilis independentis sumta non ingrediantur eam variabilem vices Constantis indeterminatae agere. Etenim in differentiationibus aliarum respectu variabilium instituendis ea quantitas pro Constante habenda est; unde si ipsius respectu non differentiatur, ea omnino

Constans est. Secundum hoc principium antecedentibus in solvenda aequatione transformata differentiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ non implicante ipsa x quae variabilibus independentibus accedebat Constantis vicem gerit, neque igitur variabilium independentium numerus augetur. Unde aequatio differentialis partialis primi ordinis, differentialium functionis quaesitae partialium respectu homogenea et quam ipsa quoque functio quaesita ingreditur, ad aliam revocari potest in qua ipsius quaesitae functionis loco quantitas constans posita est. Nam secundum antecedentia ipsa x pro Constante habita et ipsorum $\frac{\partial x}{\partial x_i}$ loco substitutis alius functionis f differentialibus $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, si solvitur aequatio et solutio proveniens f Constanti Arbitrariae aequatur, ea aequatione fuuctio quaesita x determinatur.

In aequatione

$$4.\qquad X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

substituamus formulas (2.); multiplicatione per $\frac{\partial f}{\partial x}$ facta prodit,

$$5.\qquad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Sub hac forma aequationes differentiales partiales lineares primi ordinis tractabo quas ad eam vidimus revocari posse omnes. Quae forma earum indoli perscrutandae atque nexui qui eas inter aequationes differentiales vulgares intercedit perspiciendo optime se accommodat. Quamquam autem aequatio (4.) numero variabilium constat unitate minore, observandum est, plerumque in quaestionibus generalibus quae ad variabilium numerum quamcunque patent, prae numeri variabilium reductione commodam esse simplicitatem formae.

Facilis transitus ab aequatione (4.) ad (5.) qui fit per formulas (2.) minus in promtu fuisse videtur ill. *Lagrange* in praeclaris et celeberrimis Commutationibus de aequationibus differentialibus partialibus primi ordinis Actis Academiae Berolinensis a. 1779 et 1785 insertis. *Eulerum* nexus inter aequationes (4.) et (5.) *omnino* fugisse videtur; quippe qui in Tomo III. Institutionum Calc. Int. aequationibus differentialibus partialibus dicato de aequationibus (4.) et (5.) agit pro $n=2$, sed locis prorsus diversis.

Extat interdum aequationis (4.) solutio quae neque ipsa Constantes Arbitrarias implicat neque e solutione Constantes Arbitrarias implicante provenire potest valores iis tribuendo particulares. Quae solutiones per methodum antecedentibus traditam ex aequationis (5.) solutionibus elici nequeunt sed si extant absque omni integratione inveniuntur. De quibus solutionibus singularibus hoc loco non agam.

4.

Proposita aequatione

$$1. \quad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in qua X, X_1 etc. variabilium x, x_1, etc. functiones quascunque designant, eius solutio generalis e solutionibus particularibus obtineri potest. Quae pro gravissima earum aequationum proprietate haberi debet. Neque eadem proprietate gaudet aequatio quam ad (1.) revocavi,

$$2. \quad X = X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} \dots + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n};$$

quid? quod casu eius simplicissimo quo una tantum adest variabilis independens, si proponitur aequatio differentialis vulgaris inter duas variabiles x et x_1,

$$X = X_1\frac{\partial x}{\partial x_1},$$

innumerae datae esse possunt ipsius x_1 functiones x quae aequationem praecedentem identicam reddant, neque tamen ex iis erui potest solutio generalis vel integrale completum. Propter hoc maxime commodum aequationes (1.) prae aequationibus (2.) considerare convenit.

Ac primum observo,

I. „Datis aequationis (1.) solutionibus m particularibus,

$$f_1, f_2 \dots f_m,$$

solutionem etiam esse quamlibet earum functionem

$$\Pi(f_1, f_2 \dots f_m)."$$

Fit enim

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i},$$

ideoque

$$X\frac{\partial\Pi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial\Pi}{\partial x_n}=$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial f_1}\left\{X\frac{\partial f_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right\}$$
$$+\frac{\partial\Pi}{\partial f_2}\left\{X\frac{\partial f_2}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{\partial\Pi}{\partial f_m}\left\{X\frac{\partial f_m}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right\}.$$

Eraut autem $f_1, f_2 \dots f_m$ aequationis (1.) solutiones, unde Aggregata respective per factores

$$\frac{\partial\Pi}{\partial f_1},\ \frac{\partial\Pi}{\partial f_2}\ \dots\ \frac{\partial\Pi}{\partial f_m}$$

multiplicata identice evanescunt, sive identice fit,

$$X\frac{\partial\Pi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial\Pi}{\partial x_n}=0,$$

q. d. e.

Per propositionem praecedentem cum e duabus pluribusve solutionibus innumerae aliae deducantur, eas tantum pro solutionibus inter se diversis habebo quae a se invicem sunt independentes, sive quarum nulla est reliquarum functio. Facile autem patet eiusmodi solutiones inter se diversas sive a se invicem independentes non plures quam n extare posse. Propositis enim $n+1$ variabilium totidem functionibus a se independentibus, ipsae $n+1$ functiones pro variabilibus independentibus sumi illaque variabiles vel earum functiones quaecunque per eas $n+1$ functiones exprimi possunt. Unde si haberentur $n+1$ solutiones a se independentes, vice versa singulae variabiles $x, x_1 \dots x_n$ earum functiones essent, ideoque secundum Propositionem I. ipsae $x, x_1 \dots x_n$ forent aequationis (1.) solutiones. Quod fieri nequid nisi quantitates $X, X_1 \dots X_n$ simul omnes evanescunt. Quoties enim variabilium una x_i ipsa aequationis (1.) solutio est, ipsius x_i differentialia partialia variabilium omnium x, x_1 etc. respectu sumta evanescunt praeter differentiale ipsius x_i respectu sumtum quod unitate aequale est, unde in aequatione (1.) ipsam x_i functioni f substituendo sequitur $X_i=0$. Quoties igitur singulae $x, x_1 \dots x_n$ aequationis (1.) solutiones sunt, fieri debet

$$X=0,\quad X_1=0\ \dots\ X_n=0.$$

Vix autem monitu opus est in tractanda aequatione (1.), a nobis supponi quantitates X, X_1 etc. non omnes simul evanescere. Dicere etiam licet, si

extarent $n+1$ solutiones a se independentes, quamlibet ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functionem etiam pro earum solutionem functione haberi posse, ideoque secundum Prop. I. quamlibet functionem esse aequationis (1.) solutionem, quod absurdum est.

Quo facilius cognoscatur quem fructum percipere liceat ex inventis m solutionibus a se independentibus $f_1, f_2 \dots f_n$, eas ut variabiles independentes in aequatione proposita introducamus. Sint $x_n, x_{n-1} \dots x_{n-m+1}$ variabiles quarum loco introducantur $f_1, f_2 \dots f_m$, ita ut f evadat functio variabilium,

$$x,\ x_1 \dots x_{n-m},\quad f_1, f_2 \dots f_m.$$

Functionis f differentialia partialia harum respectu variabilium sumta si uncis includo, fit, ubi x_i est una variabilium $x, x_1 \dots x_{n-m}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial f_m}\right)\frac{\partial f_m}{\partial x_i};$$

si vero x_i est una variabilium $x_{n-m+1}, x_{n-m+2} \dots x_n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial f_m}\right)\frac{\partial f_m}{\partial x_i}.$$

Quibus expressionibus substitutis eruitur,

$$\begin{aligned} X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \\ X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) &\dots + X_{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}}\right) \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right)\left\{X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right\} \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right)\left\{X\frac{\partial f_2}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial f_m}\right)\left\{X\frac{\partial f_m}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right\}. \end{aligned}$$

Hic rursus Aggregata respective multiplicata per

$$\left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right),\ \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right),\ \dots\ \left(\frac{\partial f}{\partial f_m}\right),$$

singula identice evanescunt, unde prodit aequatio,

$$3.\quad \begin{aligned} &X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ &= X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \dots + X_{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}}\right) \end{aligned}$$

Si $m = n$, e formula antecedente haec prodit Propositio:

„II. Inventis aequationis

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\;\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

n solutionibus a se independentibus $f_1, f_2 \ldots. f_n$, si introducuntur

$$x,\; f_1,\; f_2\; \ldots.\; f_n$$

ut variabiles independentes, pro quacunque functione f erit:

$$4.\quad X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\;\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).\text{"}$$

Docet formula (4.), si detur aequatio (1.), fieri

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=0,$$

sive functionem propositam f per solas $f_1, f_2 \ldots. f_n$ exprimi posse. Unde solutio generalis f erit n solutionum particularium a se independentium functio arbitraria, nulla praeterea variabili affecta. Haec enim solutio ex aequatione differentiali proposita (1.) necessario sequitur ideoque alias omnes amplecti debet solutiones.

5.

Quaeri possit, an semper extent propositae aequationis differentialis partialis

$$1.\quad 0=X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\;\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

solutiones n a se independentes. Quod revera locum habere e Propositionibus antecedentibus facile probatur, dummodo concedatur aequationes differentiales partiales ad instar aequationis (1.) formatas *omnino aliquam habere solutionem praeter Constantem.* Scilicet Constantem pro f positam aequationi propositae satisfacere patet, sed eam si $n>0$, inter solutiones non referam. Quamquam pro $n=0$ sive data aequatione, $X\frac{\partial f}{\partial x}=0$ vel $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, eius unica habetur solutio $f=$ Constans.

Ad propositum demonstrandum fingamus aequationis propositae haberi m solutiones a se independentes $f_1, f_2 \ldots. f_m$, sitque $m<n$. Nam si foret $m=n$, propositum assecuti essemus; fieri autem non posse $m>n$ sive non plures quam n solutiones independentes aequationis (1.) extare posse §. pr. monui. Sumendo $f_1, f_2 \ldots. f_m$ ipsarum $x_n, x_{n-1} \ldots. x_{n-m+1}$ loco pro variabilibus independentibus, aequatio proposita secundum formulam (3.) §. pr.

haec evadit,

$$2. \quad 0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \ldots + X_{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}}\right).$$

In qua aequatione cum desint differentialia partialia variabilium independentium, $f_1, f_2 \ldots f_m$ respectu sumta ipsae $f_1, f_2 \ldots f_m$ pro Constantibus habendae sunt. Unde quamdiu $n-m>0$ aequationis praecedentis extabit solutio f_{m+1}, quae non sit solarum $f_1, f_2 \ldots f_m$ functio, quippe quae pro Constante habenda esset, aequationes autem ad instar praecedentis formatas siquidem variabilium independentium numerus unitatem superet semper solutionem praeter Constantem habere suppositum est. Hinc numerum solutionum a se independentium continuo augere licet donec fiat $m=n$, quo casu aequatio (2.) in hanc abit:

$$3. \quad 0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{sive} \quad 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

quae non habet solutionem praeter Constantem sive quod pro hac aequatione idem est praeter solutionum iam inventarum functionem.

Ex antecedentibus patet si aequationis propositae (1.) solutiones a se independentes aliae post alias in estigantur post quamque solutionem inventam numerum variabilium independentium unitate minui posse. Ut nova habeatur solutio a iam inventis independens, aequationis ita reductae solutionem indagare sufficit quamcunque praeter Constantem. Quo in negotio eo usque pergere licet, donec aequationis propositae habeantur n solutiones a se independentes.

Inventis aequationis propositae n solutionibus a se independentibus $f_1, f_2 \ldots f_n$ quamcunque aequationis (1.) solutionem ipsarum $f_1, f_2 \ldots f_n$ functionem esse etiam inde patet, quod si haberetur solutio a $f_1, f_2 \ldots f_n$ independens, aequationis propositae plures quam n solutiones a se independentes extarent, quod fieri non posse §. 4. vidimus. Secundum antecedentia ipsarum $f_1, f_2 \ldots f_n$ functiones totidem a se independentes quaecunque et ipsae sunt aequationis propositae (1.) solutiones a se independentes; et vice versa, aequationis (1.) solutiones quaecunque n, quarum nulla reliquarum functio est, functiones a se independentes esse debent ipsarum $f_1, f_2 \ldots f_n$.

Quia aequatio

$$4. \quad f = \Pi(f_1, f_2 \ldots f_n),$$

in qua Π functionem arbitrariam designat, est aequationis propositae (1.) solutio generalis, secundum §. 3. solutio generalis aequationis

$$5. \quad X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$$

dabitur aequatione:

$$6. \quad \Pi(f_1, f_2 \ldots\ldots f_n) = a.$$

Generalitati nihil addit Constans Arbitraria a quippe quam ponere licet functioni arbitrariae Π subesse. Itaque aequatione differentiali (5.) indicatur, aequationem inter $n+1$ variabiles $x, x_1 \ldots\ldots x_n$, e qua valor functionis x petendus sit, representari posse ut aequationem inter numerum unitate minorem quantitatum, quae ut solutiones dantur aequationis,

$$0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Quae vero sit aequatio inter illas n quantitates locum habens ipsa aequatione (5.) nullo modo definitur, sed prorsus in arbitrio relinquitur.

Ut aequationis (1.) solutio determinetur, addi potest conditio ut f in datam ipsarum $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ functionem abeat, ubi x sive evanescit, sive datum constantem valorem induit; vel etiam generalius ut inter $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ aequatione data quacunque $F(x, x_1 \ldots\ldots x_n) = 0$ abeat f in functionem datam quamcunque $\Gamma(x, x_1 \ldots\ldots x_n)$. Exprimantur enim F et Γ per $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ unamque variabilium x, x_1 etc. veluti x; deinde ex aequatione

$$F(x, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n) = 0$$

eruatur

$$x = \varphi(f_1, f_2 \ldots\ldots f_n);$$

aequabitur f ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functioni, in quam abit $\Gamma(x, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n)$ ponendo $x = \varphi(f_1, f_2 \ldots\ldots f_n)$, hoc est, fit solutio quaesita,

$$f = \Gamma(\varphi, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n).$$

Haec enim ipsius f expressio et solarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functio ideoque aequationis (1.) solutio est ubi $F = 0$ sive $\varphi = x$ in datam functionem Γ abit. Per antecedentia probatur quoque, quod bene tenendum est, aequationis (1.) solutionem f, si pro $x = 0$ aut pro alia quacunque aequatione $F = 0$ quae non in aequationem inter solas $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ redeat Constanti aequetur ipsam esse Constantem. Videlicet si ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functio f ponendo $x = \varphi(f_1, f_2 \ldots\ldots f_n)$ Constanti aequatur, ipsa illa functio f esse debet Constans, cum ea positione mutationem nullam subire possit. Scilicet suppono ipsam x non esse quantitatum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functionem quod ad unam certe variabilium $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ valet.

Simili ratione aequationis (5.) solutio hac conditione determinari potest, ut data quacunque aequatione $F = 0$, alia quoque data aequatio quaecunque

$\Gamma = 0$ inter ipsas $x, x_1 \ldots. x_n$ locum habeat. Rursus enim et F et Γ per $x, f_1, f_2 \ldots. f_n$ expressis, eliminando x ex aequationibus $F = 0$, $\Gamma = 0$, obtinemus aequationem

$$\Pi(f_1, f_2 \ldots. f_n) = 0,$$

qua si x per $x_1, x_2 \ldots. x_n$ determinatur, solutio aequationis (5.) quaesita prodit.

Postulavi antecedentibus variabiles $x, x_1 \ldots. x_n$ exprimi per unam earum x ipsasque $f_1, f_2 \ldots. f_n$, sive ipsas,

$$f_1, f_2 \ldots. f_n, \ x,$$

pro variabilibus independentibus sumi. Quod semper licet nisi x ipsarum $f_1, f_2 \ldots. f_n$ functio sit ideoque aequationis (1.) solutio. Si vero x aequationis (1.) solutio est, fieri debet

$$X = 0,$$

et vice versa patet, si $X = 0$, esse x aequationis (1.) solutionem. Hinc sequitur Propositio:

„Ipsas $f_1, f_2 \ldots. f_n, x$ pro variabilibus independentibus sumi posse „quoties X non evanescat, non posse, si evanescat."

Aequationis (1.) Coefficientes X, X_1 etc. si non omnes evanescunt, quocum nulla omnino aequatio haberetur, supponam in sequentibus, etiamsi non expresse adnotetur, esse X eam quae certo non evanescat. Cum nulla supponatur inter quantitates $f_1, f_2 \ldots. f_n, x$ extare aequatio, ipsae $f_1, f_2 \ldots. f_n$ etiam pro solarum $x_1, x_2 \ldots. x_n$ functionibus habitae a se independentes erunt, ideoque si X non identice evanescit etiam functionum $f_1, f_2 \ldots. f_n$ Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots. \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

identice evanescere nequit. V. Comment. *de Determinantibus Functionalibus.*

Solutiones $f_1, f_2 \ldots. f_n$ a duabus simul variabilibus vacuae esse non possunt, quia non dantur $n-1$ variabilium n functiones a se independentes. Si solutiones illae omnes unam variabilium, ex. gr. variabilem x non involvunt, singulae $x_1, x_2 \ldots. x_n$ per $f_1, f_2 \ldots. f_n$ exprimi poterunt sive aequationis (1.) solutiones erunt. Quod fieri nequit, nisi $X_1, X_2 \ldots. X_n$ omnes simul evanescunt. Unde vice versa, si non omnes $X_1, X_2 \ldots. X_n$ simul evanescunt, solutiones aequationis (1.) non omnes ab ipsa x vacuae esse possunt.

Si dico, designante f aequationis (1.) solutionem quamcunque, aequatione $f = 0$ determinari ipsarum $x_1, x_2 \ldots. x_n$ functionem x satisfacientem

4*

aequationi,

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}:$$

tacite suppono eam solutionem f ipsam x omnino involvere. Cuiusmodi solutionem semper extare antecedentibus vidimus nisi ipsae $X_1, X_2 \dots X_n$ simul omnes evanescant.

6.

Adnotabo iam casus quosdam speciales, quibus aequationes differentiales partiales lineares primi ordinis aut solvere aut ad alias simpliciores reducere liceat.

Statuamus aequationi (1.) §. pr. accedere terminum cum a functione quaesita f tum a differentialibus eius partialibus vacuum, ita ut aequatio proposita sit,

$$1.\quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = U,$$

designante U ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functionem. Constabit aequationis (1.) solutio, si aequatio,

$$2.\quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

complete soluta est; hoc est, si eius novimus n solutiones a se independentes $f_1, f_2 \dots f_n$. Ipsis enim $f_1, f_2 \dots f_n$ variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$ loco introductis, aequatio (1.) secundum formulam (4.) §. 4. abit in hanc,

$$3.\quad X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = U,$$

in qua datae ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functiones X et U per ipsas $x, f_1, f_2 \dots f_n$ exprimendae sunt. Ex hac aequatione sequitur

$$4.\quad f = \int \frac{U}{X}\partial x + \Gamma(f_1, f_2 \dots f_n),$$

siquidem in integratione ipsius x respectu transigenda ipsae $f_1, f_2 \dots f_n$ pro Constantibus habentur atque Γ ipsarum $f_1, f_2 \dots f_n$ functionem designat arbitrariam. Ut exhibeatur solutio inventa per variabiles $x, x_1 \dots x_n$, post integrationem factam restituendae erunt ipsarum $f_1, f_2 \dots f_n$ expressiones per variabiles $x, x_1 \dots x_n$ exhibitae; sed per idoneam integralium *definitorum* applicationem fieri potest, ut expressiones illae iam sub signo integrali substituantur. Qua ratione quod semper pro commodo haberi debet obtinetur formula per se ipsa clara neque interpretatione verbali egens.

Sit enim

$$\frac{U}{X} = F(x, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n),$$

in functione illa quae sub signo integrali invenitur scribo ξ ipsius x loco; designante α Constantem seu ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functionem integratio extendenda erit inde a $\xi = \alpha$ usque ad $\xi = x$, sive erit

$$5. \quad f = \int_\alpha^x F(\xi, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n)\partial\xi,$$

qua in formula sub integrationis signo ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ expressiones per variabiles propositas $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ substituere licet. Proponatur ex. gr. residuum seriei Taylorianae

$$f = \varphi(x+h) - \varphi(x) - \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}h - \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots - \frac{\partial^{n-1}\varphi(x)}{\partial x^{n-1}}\cdot\frac{h^{n-1}}{\Pi_{(n-1)}},$$

ubi $\Pi_n = 1.2.3\ldots\ldots n$. Expressionem ad dextram facile patet satisfacere aequationi differentiali partiali,

$$6. \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{\partial^n\varphi(x)}{\partial x^n}\cdot\frac{h^{n-1}}{\Pi_{(n-1)}}.$$

Aequationis,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial h} = 0$$

est solutio,

$$f_1 = x + h,$$

qua loco h introducta ut variabili independente fit aequatio (6.),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^n\varphi(x)}{\partial x^n}\cdot\frac{(f_1-x)^{n-1}}{\Pi_{n-1}}.$$

Hac integrata aequatione prodit,

$$f = \frac{-1}{\Pi_{n-1}}\int_\alpha^x \frac{\partial^n\varphi(x)}{\partial x^n}(f_1-x)^{n-1}dx,$$

designante α functionem quantitatis f_1 quae inter integrationem pro Constante habetur. In dextra aequationis praecedentis parte sub integrationis signo scribatur ξ loco x atque restituatur $x+h$ loco f_1, prodit,

$$f = \frac{-1}{\Pi_{n-1}}\int_\alpha^x \frac{\partial^n\varphi(\xi)}{\partial\xi^n}(x+h-\xi)^{n-1}\partial\xi.$$

Valor ipsius α eo determinatur, quod evanescat f pro $h=0$ sive pro $x=f_1$, unde limes inferior fieri debet,

$$\alpha = f_1 = x + h.$$

His collectis limitibusque inversis prodit,

$$f = \frac{1}{\Pi_{(n-1)}} \int_x^{x+h} \frac{\partial^n \varphi(\xi)}{\partial \xi^n} (x+h-\xi)^{n-1}.$$

Quod notum est integrale definitum seriei Taylorianae residuum exprimens.

Statuamus proposita aequatione (1.),

$$0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Coefficientes X, X_1 etc. unius variabilis x esse functiones. Pro singulis indicis i valoribus $1, 2 \dots n$ vocemus φ_i functionem quae satisfaciat aequationi,

$$7. \quad X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0,$$

unde fit,

$$\varphi_i = x_i - \int \frac{X_i}{X} \partial x.$$

Cum sint X atque X_i solius x functiones, etiam integrale quod aequatio praecedens implicat solius x functio erit; integrali enim non adiici suppono aliarum variabilium functionem quasi Constantem Arbitrariam. Unde erit φ_i etiam aequationis (1.) solutio, cum ipsius φ_i differentialia partialia praeter $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ omnia evanescant, ideoque pro ea solutione aequatio (1.) redeat in (7.). Nanciscimur hac ratione solutiones n aequationis (1.) φ_1, $\varphi_2 \dots \varphi_n$, quae a se independentes erunt cum singulae implicent singulas variabiles a se independentes $x_1, x_2 \dots x_n$. Unde fit aequationis propositae (1.) solutio generalis,

$$f = \Pi(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n).$$

Prorsus idem valet, si ipsae X_i praeter x respective variabilem x_i continent, nisi quod eo casu determinatio functionis φ_i per aequationem (7.) non Quadraturam sed integrationem aequationis differentialis vulgaris primi ordinis inter duas variabiles requirit. Exemplum propositum complectitur casum quo ipsae X, X_1 etc. merae Constantes sunt. Designantibus enim a, a_1 etc. Constantes si proponitur aequatio,

$$0 = a \frac{\partial f}{\partial x} + a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

e praecedentibus eius solutio habetur generalis,

$$f = \Pi\left(x_1 - \frac{a_1 x}{a},\ x_2 - \frac{a_2 x}{a},\ \dots\ x_n - \frac{a_n x}{a}\right).$$

Ad hunc revocatur casus quo X, X_1 etc. *respective* solarum x, x_1 etc. functiones sunt. Introducendo enim ut variabilem independentem loco x_i ipsius x_i functionem t_i datam per aequationem,

$$t_i = \int \frac{\partial x_i}{X_i}$$

fit,

$$X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t_i};$$

unde aequatio proposita abit in hanc,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \dots + \frac{\partial f}{\partial t_n},$$

cuius est solutio generalis

$$f = \Pi(t_1 - t,\ t_2 - t \dots t_n - t),$$

sive erit f differentiarum integralium,

$$\int \frac{\partial x_i}{X_i}$$

functio arbitraria. Quo frequenter et aliis casibus uti licet artificio, cuius ope *Eulerus* nonnullorum quae tractavit exemplorum solutiones facilius detexisset.

Consideremus casum generaliorem quo omnes X, X_1 etc. solarum x, $x_1 \dots x_{n-m}$ functiones sunt neque igitur variabiles x_n, $x_{n-1} \dots x_{n-m+1}$ continent. Eo casu indagentur solarum x, $x_1 \dots x_{n-m}$ functiones a se independentes,

$$f_1,\ f_2 \dots f_{n-m},$$

quae sint solutiones aequationis,

$$0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_{n-m}\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}}.$$

Erunt illae etiam aequationis (2.) solutiones cum ipsas $x_{n-m+1}, x_{n-m+2} \dots x_n$ non contineant ideoque earum differentialia harum respectu variabilium sumta evanescant. Introductis $f_1, f_2 \dots f_{n-m}$ variabilium $x_1, x_2 \dots x_{n-m}$ loco, e §. 4. fit,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_{n-m}\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}} = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

differentialia autem ipsarum x_{n-m+1} etc. respectu sumta ea novarum variabilium independentium introductione non mutanda sunt, quia f_1, f_2 etc. illas non implicant variabiles x_{n-m+1} etc. Induit igitur aequatio (2.) hanc formam,

$$0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_{n-m+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}}\right) + X_{n-m+2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+2}}\right) \dots + X_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

in qua Coefficientes X, X_{n-m+1} etc. per quantitates x, f_1, f_2 .... f_{n-m} exprimendae sunt neque secundum suppositionem factam variabiles x_{n-m+1}, x_{n-m+2} .... x_n implicant. In aequatione praecedente quantitates f_1, f_2 ... ... f_{n-m} quarum respectu non differentiatur, pro Constantibus habendae sunt; unde illa in casum antecedentibus tractatum redit, quo Coefficientes unius variabilis functiones sunt; qui casus per solas Quadraturas absolvebatur.

Antecedentibus aequatio proposita quoties variabilium independentium nonnullas non ipsas, sed tantum differentialia earum respectu sumta continet, ad aliam revocatur, in qua totidem variabiles omnino desunt sive variabilium independentium numerus totidem unitatibus minor est. Quod fieri posse in aequationibus differentialibus partialibus primi ordinis etiam non linearibus iam olim *Eulerus* docuit.

Si ipsae quidem X, X_1 .... X_{n-m} solarum x, x_1 .... x_{n-m} functiones sunt, sed reliquae X_{n-m+1}, X_{n-m+2} etc. variabiles independentes omnes implicant, valebit adhuc aequatio reducta,

$$0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_{n-m+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}}\right) + X_{n-m+2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+2}}\right) \ldots + X_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

sed in ea Coefficientes praeter ipsas f_1, f_2 .... f_{n-m}, quae pro Constantibus habentur, adhuc variabiles x, x_n, x_{n-1} .... x_{n-m+1} continent. Eo igitur casu aequatio proposita, in qua variabiles independentes sunt numero $n+1$, in duas dividitur, alteram post alteram solvendas, in quarum priore numerus variabilium est $n-m+1$, in posteriore $m+1$.

Sub finem addam exemplum quo ill. *Lagrange* in Commentatione, qua primum aequationes differentiales partiales primi ordinis ad aequationes differentiales vulgares revocavit, eius reductionis usum illustratum ivit. Quod videbimus exemplum eadem elegantia et fortasse magis directe sine aequationum differentialium vulgarium interventione obsolvi.

Proponatur aequatio,

$$(y+t+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+t+z)\frac{\partial z}{\partial y} + (x+y+z)\frac{\partial z}{\partial t} = x+y+t\text{*)}.$$

Functio quaesita z si per aequationem $f=\alpha$ determinatur, satisfacere debet f aequationi sequenti,

$$0 = (x+y+z)\frac{\partial f}{\partial t} + (y+z+t)\frac{\partial f}{\partial x} + (z+t+x)\frac{\partial f}{\partial y} + (t+x+y)\frac{\partial f}{\partial z},$$

---

*) *Acad. Ber. a. 1779 pg. 155.*

quam sic exhibeo:

$$0 = (t+x+y+z)\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\left(t\frac{\partial f}{\partial t}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Secundum supra tradita evanescit expressio,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z},$$

si f est quaecunque differentiarum

$$z-t,\quad z-x,\quad z-y,$$

functio, quas ea de causa trium variabilium independentium loco introducamus; pro quarta sumo omnium variabilium summam $t+x+y+z$. Sit

$$z-t = p,\quad z-x = q,\quad z-y = r,\quad t+x+y+z = s,$$

atque differentialia partialia ipsarum p, q, r, s respectu sumta uncis includantur, fit

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z} = 4\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right),$$

$$t\frac{\partial f}{\partial t}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z} = p\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+q\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)+r\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)+s\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right).$$

Unde aequatio proposita in hanc abit,

$$0 = 3s\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)-p\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+q\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)-r\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

sive per 3 divisa in hanc,

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lg s}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial \lg p^{-3}}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial \lg q^{-3}}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial \lg r^{-3}}\right).$$

Quae secundum antecedentia docet aequatio, functionem quaesitam f esse functionem arbitrariam differentiarum,

$$\lg s-\lg p^{-3},\quad \lg s-\lg q^{-3},\quad \lg s-\lg r^{-3},$$

vel si logarithmis numeros substituis, functionem arbitrariam quantitatum,

$$sp^3,\quad sq^3,\quad sr^3,$$

quod cum solutione *Lagrangiana* convenit.

7.

Aequationis differentialis partialis linearis primi ordinis,

$$1.\quad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\;\ldots\;+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

ad quam reliquas omnes revocavi, proponatur solutionem f in seriem infinitam evolvere, addita simul conditione maxime generali cui satisfieri posse §. 5. vidimus est functio f pro data inter variabiles independentes aequatione,

$$U = 0,$$

in datam functionem Γ abeat. Pono

$$2.\quad f = \Gamma - \Gamma' U + \Gamma'' \frac{U^2}{1.2} - \Gamma''' \frac{U^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

quae expressio conditioni propositae aperte satisfacit. Substituta (2.) in aequatione proposita (1.) et expressionibus singulis in singulas ipsius U potestates ductis nihilo aequatis, eruuntur aequationes quibus quantitates Γ', Γ'' etc. aliae post alias e data functione Γ determinari possunt. Ponamus enim designante V ipsarum $x, x_1 \ldots . x_n$ functionem, per ipsum V uncis inclusum denotari expressionem,

$$3.\quad [V] = X\frac{\partial V}{\partial x} + X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} \ldots . + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

unde si $V = U^m$, fit

$$4.\quad [U^m] = m U^{m-1}[U].$$

Qua adhibita notatione, substituendo (2.) aequatio proposita (1.) in hanc abibit,

$$5.\quad 0 = [\Gamma] - [\Gamma'] U + [\Gamma''] U^2 - \text{etc.}$$
$$- \{\Gamma' - \Gamma'' U + \Gamma''' U^2 + \text{etc}\}[U].$$

Cui aequationi satisfit ponendo,

$$6.\quad \Gamma' = \frac{[\Gamma]}{[U]},\quad \Gamma'' = \frac{[\Gamma']}{[U]},\quad \Gamma''' = \frac{[\Gamma'']}{[U]},\quad \text{etc.}$$

quibus formulis seriei infinitae propositae Coëfficientes alii post alios determinantur.

Si U ipsam x involvit, e formula (2.) obtineri possunt aequationis (1.) solutiones n a se independentes ponendo ipsius Γ loco successive ipsas $x_1, x_2 \ldots . x_n$. Inter solutiones enim sic provenientes extare non potest aequatio quippe quae etiam locum haberet si statuitur $U = 0$ sive x ipsarum $x_1, x_2 \ldots . x_n$ functioni aequalis; posito autem $U = 0$, solutiones in quantitates $x_1, x_2 \ldots . x_n$ abire statuimus quae a se independentes sunt neque a se dependentes fieri possunt eo quod alia quantitas x earum functioni aequetur.

Sint variabiles $x, x_1, x_2 \ldots . x_n$ omnes unius earum functiones quae satisfaciant systemati aequationum differentialium vulgarium,

$$7.\quad dx_1 = \frac{X_1}{X} dx,\quad dx_2 = \frac{X_2}{X} dx,\quad \ldots .\quad dx_n = \frac{X_n}{X} dx;$$

designantibus V et W binas ipsarum $x, x_1 \ldots . x_n$ functiones, erit e (3.) et (7.),

$$\frac{[V]}{[W]} = \frac{X\frac{\partial V}{\partial x} + X_1\frac{\partial V}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}}{X\frac{\partial W}{\partial x} + X_1\frac{\partial W}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial W}{\partial x_n}}$$

$$= \frac{\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}dx_n}{\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial x_1}dx_1 \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n}dx_n},$$

ideoque e notatione adhibita,

$$8. \quad \frac{[V]}{[W]} = \frac{dV}{dW}.$$

Unde e formulis (6.) obtinemus,

$$9. \quad \Gamma' = \frac{d\Gamma}{dU}, \quad \Gamma'' = \frac{d\Gamma'}{dU}, \quad \Gamma''' = \frac{d\Gamma''}{dU}, \quad \text{etc.}$$

Variabiles $x, x_1 \dots x_n$ si unius earum functiones sunt, functiones etiam erunt cuiuslibet earum functionis U, unde Γ pro ipsius U functione haberi potest. Cuius functionis differentialia successiva erunt e (9.) ipsae Γ', Γ'' etc. sive erit,

$$10. \quad \Gamma' = \frac{d\Gamma}{dU}, \quad \Gamma'' = \frac{d^2\Gamma}{dU^2}, \quad \Gamma''' = \frac{d^3\Gamma}{dU^3}, \quad \text{etc.}$$

scilicet Algorithmi (6.) quibus quantitates Γ', Γ'' etc. formantur iidem sunt quibus inveniuntur differentialia,

$$\frac{d^m\Gamma}{dU^m},$$

si et Γ et U dantur ut functiones variabilium $x, x_1 \dots x_n$, inter quas locum habent aequationes differentiales vulgares (7.). Nec nisi aequationes (7.) integratae habeantur ullo alio modo illa differentialia $\frac{d^m\Gamma}{dU^m}$ determinari possunt nisi per Algorithmos (6.).

Substitutis (10.) abit series infinita (2.) in hanc,

$$f = \Gamma - \frac{d\Gamma}{dU}U + \frac{d^2\Gamma}{dU^2}\cdot\frac{U^2}{1.2} - \frac{d^3\Gamma}{dU^3}\cdot\frac{U^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

quam e theoremata *Tayloriano* constat aequari quantitati constanti,

$$\Gamma(U-U) = \Gamma(0).$$

Videmus igitur aequationis (1.) solutionem quamcunque in quantitatem constantem abire si inter ipsas $x, x_1 \dots x_n$ tales constituantur relationes quae aequationibus differentialibus vulgaribus (7.) satisfaciant. Quod absque ullo serierum infinitarum adiumento patet si reputamus propter aequationem identicam

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

evanescere ipsius f differentiale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n,$$

quoties aequationes differentiales (7.) locum habeant. Unde si inter ipsas $x, x_1 \dots x_n$ locum habent aequationes quaecunque e quibus aequationes differentiales vulgares (7.) deduci possunt, ex iisdem aequationibus sequi debet,

$$df = 0 \quad \text{sive} \quad f = \text{Constans}.$$

Sed de systemate aequationum differentialium vulgarium (7.) eiusque intima connexione cum aequatione differentiali partiali (1.) fusius in sequentibus agam.

De aequationum differentialium vulgarium simultanearum systematis.

8.

Systema aequationum differentialium vulgarium simultanearum proponamus forma proportionis,

$$1. \quad dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 : \dots : X_n,$$

designantibus X, X_1 etc. datas quascunque variabilium $x, x_1 \dots x_n$ functiones. Quam proportionem locum tenere censeo n aequationum,

$$2. \quad X_1 dx - X dx_1 = 0, \quad X_2 dx - X dx_2 = 0 \dots X_n dx - X dx_n = 0.$$

Quamquam in forma proposita differentialia ordinem primum non egrediuntur ea pro generali haberi potest, ut ad quam quodvis systema aequationum differentialia vulgaria cuiuslibet ordinis implicantium revocari potest. Sit primum proposita una aequatio differentialis n^{ti} ordinis inter duas variabiles x et y,

$$3. \quad \frac{d^n y}{dx^n} = Y,$$

designante Y functionem quamcunque ipsarum x, y et quotientium differentialium ipsius y usque ad $n-1^{\text{tum}}$: statuendo

$$\frac{d^i y}{dx^i} = y^{(i)},$$

aequationis propositae locum tenebit proportio

$$4. \quad dx : dy : dy' \dots : dy^{(n-2)} : dy^{(n-1)} = 1 : y' : y'' \dots : y^{(n-1)} : Y,$$

ubi in functione Y pro differentialibus $\frac{d^i y}{dx^i}$ ponendae sunt quantitates $y^{(i)}$.

Unde introducendo ipsas $y', y'' \dots y^{(n-1)}$ ut novas variabiles revocatur una aequatio n^{ti} ordinis inter duas variabiles ad n aequationes primi ordinis inter $n+1$ variabiles. Si aequationes (4.) comparamus cum (1.), videmus eas constituere casum quo pro ipsius i valoribus $1, 2 \dots n-1$ habeatur,

$$5. \quad X_i = x_{i+1},$$

ipsa X autem unitati aequalis et ultima X_n omnium variabilium functio sit. Vice versa quoties proponitur huiusmodi systema aequationum differentialium vulgarium,

$$6. \quad dx : dx_1 : dx_2 \dots dx_{n-1} : dx_n = 1 : x_2 : x_3 \dots : x_n : X_n,$$

id cum unica aequatione

$$7. \quad \frac{d^n x_1}{dx^n} = X_n,$$

convenit, in cuius dextra parte X_n ipsis $x_2, x_3, \dots x_n$ respective substituenda sunt differentialia,

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2 x_1}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}}.$$

Prorsus simili ratione formam aequationum (1.) induere potest systema aequationum differentialium vulgarium,

$$8. \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B \quad \text{etc.}$$

ubi in functionibus A, B, etc. differentialia ipsius x ordinem $p-1^{\text{tum}}$, differentialia ipsius y ordinem $q-1^{\text{tum}}$ etc. non excedunt. Rursus enim ponendo

$$\frac{d^i x}{dt^i} = x^{(i)}, \quad \frac{d^i y}{dy^i} = y^{(i)} \text{ etc.},$$

introducantur $x', x'' \dots x^{(p-1)}, y', y'' \dots y^{(q-1)}$ ut novae variabiles: aequationum propositarum (8.) locum tenebit proportio

$$9. \quad \begin{aligned} &dt : dx : dx' \dots dx^{(p-2)} : dx^{(p-1)} : dy : dy' \dots dy^{(q-2)} : dy^{(q-1)} \dots \\ &= 1 : x' : x'' \dots x^{(p-1)} : A \quad : y' : y'' \dots y^{(q-1)} : B \dots, \end{aligned}$$

ubi in functionibus A, B, etc. differentialibus $\frac{d^i x}{dt^i}, \frac{d^i y}{dt^i}$ etc. substituendae sunt quantitates $x^{(i)}, y^{(i)}$ etc. Unde introducendo x', x'', etc. ut novas variabiles, aequationes (8.) ad $p+q+\dots$ aequationes differentiales vulgares primi ordinis revocantur. Aequationes (9.) forma propositarum (1.) gaudent earumque casum constituunt eum quo $X=1$ atque pro insequentibus indicis i valoribus,

$$X_i = x_{i+1},$$

exceptis valoribus ipsius i aliquot intermediis eiusque valore finali $i=n$,

pro quibus X_i non uni variabilium aequalis est sed omnium variabilium functioni aequari potest.

Si differentiales vulgares propositas non immediate ad formam aequationum (8.) revocare licet, id semper per idoneas differentiationes et eliminationes fieri poterit. Ut exemplum simplex tradam, proponantur duae aequationes,

$$10.\quad u = 0, \quad v = 0,$$

sintque ipsarum x et y differentialia altissima quae in iis obveniunt,

$$\frac{d^p x}{dt^p}, \quad \frac{d^q y}{dt^q}$$

quorum utrumque alteram afficiat aequationem $u = 0$, altera autem $v = 0$ eorum neutrum involvat sed altissima ipsarum x et y differentialia quae in ea obveniunt sint,

$$\frac{\partial^{p-i} x}{\partial t^{p-i}}, \quad \frac{\partial^{q-k} y}{\partial t^{q-k}}.$$

Sit $i \leqq k$, aequatione $v = 0$ differentiata i vicibus successivis, ope i aequationum,

$$11.\quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = 0, \quad \dots\dots \quad \frac{d^i v}{dt^i} = 0,$$

ex aequatione $u = 0$ eliminari poterunt differentialia,

$$\frac{d^{p-i+1} x}{dt^{p-i+1}}, \quad \frac{d^{p-i+2} x}{dt^{p-i+2}}, \quad \dots\dots \quad \frac{d^p x}{dt^p},$$

ita ut altissima quae aequationem $u = 0$ afficiunt differentialia fiant,

$$\frac{\partial^{p-i} x}{\partial t^{p-i}}, \quad \frac{\partial^q y}{\partial t^q}.$$

Unde ex hac aequatione et aequatione $v = 0$ resolutis erui possunt sequentes,

$$12.\quad \frac{d^{p-i} x}{dt^{p-i}} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B,$$

in quibus et A et B nonnisi differentialia iis quae ad laevam posita sunt inferiora involvunt. Quae igitur gaudent aequationes forma proposita aequationum (8.) ideoque ex antecedentibus etiam ad formam aequationum (1.) revocari possunt. Eritque aequationum propositarum $u = 0$, $v = 0$ systema $(p+q-i)^{\text{ti}}$ ordinis.

9.

Demonstravi §. 7.

I. „per aequationes finitas*) quae aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$1.\quad dx : dx_1 \ldots . dx_n = X : X_1 \ldots . X_n,$$

satisfaciant, unamquamque solutionem f aequationis differentialis partialis,

$$2.\quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

aequalem evadere Constanti."

Scilicet fit,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial x_1 \ldots . + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial x_n,$$

quae expressio evanescit, si dx, dx_1 etc. eandem rationem inter se tenent atque quantitates X, X_1 etc. simulque functio f aequationi (2.) identice satisfacit; ubi autem $df = 0$, fit

$$3.\quad f = \text{Constans}.$$

Propositionis praecedentis exceptiones haberi possunt si fieri potest ut per n aequationes simul omnes $n+1$ quantitates X, $X_1 \ldots . X_n$ evanescentes reddantur, vel si evenit ut per aequationes illas finitas differentialia functionis f partialia in infinitum abeant, quippe quo casu df indueret formam expressionis indeterminatae $\frac{0}{0}$. Quibus de exceptionibus singularibus hic non agam.

Aequationis (2.) cum extent n solutiones a se independentes, sequitur ex antecedentibus per aequationes inter variabiles x, x_1 etc., e quibus aequationes differentiales vulgares,

$$\partial x : \partial x_1 \ldots . : \partial x_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

deducere liceat, evadere n solutiones aequationis (2.) a se invicem independentes aequales Constantibus. Vice versa habetur Propositio:

II. „Si n solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots . + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

*) Aequationes *finitae* dicuntur, quae sunt inter solas variabiles dependentes et independentes neque earum differentialia involvunt. Si quotientes differentiales pro novis variabilibus sumuntur, fieri potest ut eadem aequatio modo pro aequatione finita, modo pro aequatione differentiali habeatur.

aequales ponuntur Constantibus Arbitrariis, habentur inter $n+1$ variabiles $x, x_1 \dots x_n$ aequationes n, e quibus deducere liceat n aequationes differentiales vulgares,

$$dx : dx_1 \dots dx_n = X : X_1 \dots X_n."$$

Ad Propositionem antecedentem demonstrandum supponamus, ipsam X non identice evanescere. Sint aequationis differentialis partialis propositae solutiones a se independentes, $f_1, f_2 \dots f_n$, quae respective Constantibus Arbitrariis $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ aequales ponantur; sequitur ex aequationibus,

$$5. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad f_n = \alpha_n,$$

differentiando:

$$6. \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 = \frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n. \end{cases}$$

Aequationes praecedentes habeamus pro n aequationibus linearibus quarum incognitae sunt n quantitates $dx_1, dx_2 \dots dx_n$; secundum (2.) satisfit aequationibus illis ponendo

$$7. \quad dx_1 = \frac{X_1}{X} dx, \quad dx_2 = \frac{X_2}{X} dx, \quad \dots \quad dx_n = \frac{X_n}{X} dx,$$

quae cum aequationibus differentialibus vulgaribus propositis conveniunt. Unde vice versa ex aequationibus (6.) necessario sequuntur aequationes (7.). Aequationum enim linearium quarum idem atque incognitarum numerus semper unica tantum habetur resolutio si earum non evanescit Determinans; aequationum (6.) autem Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

vidimus §. 5. non evanescere ipso X non identice evanescente.

Quantitates $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ cum ut Constantes *Arbitrariae* valores quoscunque induere possint et ipsae pro *variabilibus* independentibus haberi possunt, ita ut aequationes finitae quae aequationibus differentialibus propositis (1.) satisfaciunt, praeter ipsas $x, x_1, x_2 \dots x_n$ adhuc n alias independentes variabiles involvere possint, quae neque ipsae neque differentialia earum respectu sumta aequationes differentiales propositas afficiunt. Variabilium illarum novarum independentium $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ loco functiones

earum quaecunque n a se independentes $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ in aequationibus integralibus introduci sive pro Constantibus Arbitrariis sumi possunt. Quo idem assequimur ac si in aequationibus (5.) ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ loco functiones earum n a se independentes pro aequationis differentialis partialis sumimus solutionibus quae Constantibus Arbitrariis aequentur.

10.

Propositis aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$1.\quad dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n,$$

earum *aequationes integrales* dicuntur n aequationes finitae e quibus propositas deducere licet, et dicuntur illae aequationes integrales *completae* si n Constantes Arbitrarias involvunt, quae ad minorem numerum revocari non possunt. Sint $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ Constantes Arbitrariae quas aequationes integrales completae involvunt, atque sint rursus

$$f_1, \; f_2 \; \ldots\ldots \; f_n$$

solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$2.\quad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

quas ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacuas suppono. Secundum Prop. I. §. pr. per aequationes integrales propositas fieri debent $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ Constantibus aequales,

$$\alpha_1, \; \alpha_2 \; \ldots\ldots \; \alpha_n,$$

quae erunt ipsarum $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ functiones. Aequationes quae hac ratione obtinentur,

$$3.\quad f_1 = \alpha_1, \; f_2 = \alpha_2 \; \ldots\ldots \; f_n = \alpha_n,$$

cum a se invicem independentes eodemque numero sint, locum tenere possunt aequationum integralium propositarum. Quae cum completae esse supponantur, fieri debent $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ ipsarum $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ functiones a se independentes. Nam si foret earum una, α_n reliquarum $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ functio, ipsas praeterea β_1, β_2 etc. non implicans, sequeretur aequationes integrales propositas revocari posse ad alias, Constantium Arbitrariarum $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_{n-1}$ functionibus $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ affectas neque praeterea ipsas β_1 etc. implicantes. Unde illis ipsarum β_1 etc. functionibus pro Constantibus Arbitrariis sumtis revocarentur aequationes integrales propositae ad alias minore Constantium Arbitrariarum numero affectas, ideoque secundum definitionem positam non essent completae.

Si $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ sunt ipsarum $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ functiones a se independentes, etiam $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ ipsarum $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ functiones a se independentes sunt. Unde e (3.) sequitur,

$$4.\quad \beta_1 = F_1,\quad \beta_2 = F_2 \quad \ldots\ldots \quad \beta_n = F_n,$$

designantibus $F_1, F_2 \ldots\ldots F_n$ ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ functiones a se independentes. Itaque ipsae quoque F_1, F_2 etc. erunt aequationis (2.) solutiones a se independentes (§. 5.) sive habetur Propositio:

I. „Aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$dx : dx_1 \ldots\ldots dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n,$$

quocunque modo complete integratis, aequationes integrales completae Constantium Arbitrariarum respectu resolvi possunt et variabilium functiones n quibus ea resolutione Constantes Arbitrariae aequales evadunt, solutiones sunt a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0."$$

Generaliter quoties n quantitates ope n aequationum determinantur seu per alias quantitates easdem aequationes afficientes exprimi possunt, non fieri potest ut ex aequationibus illis deducatur aequatio ab omnibus illis n quantitatibus vacua sive e qua quantitates illae omnes eliminatae sint. Quippe quae aequatio nihil contribueret ad quantitates determinandas unde n quantitates $n-1$ aequationibus determinarentur quod fieri nequit. Hinc e Propositione I. haec sequitur:

II. „Ex aequationibus integralibus completis nulla deduci potest aequatio inter solas variabiles $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ e qua omnes Constantes Arbitrariae eliminatae sint vel si habetur aequatio ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacua necessario identica erit."

Ex n aequationibus integralibus non deduci posse aequationem ab omnibus *variabilibus* vacuam vix monitu opus est. Etenim ad aequationes integrales pertinere non potest inter solas quantitates constantes aequatio, qua reiecta tantum $n-1$ adessent inter variabiles x, x_1 etc. aequationes e quibus n aequationes differentiales propositae vel n aequationes finitae (3.) deduci non possunt. Qua de re si proponantur quaecunque m ex aequationum integralium numero, earum ope m variabiles per reliquas determinare licet, quippe quae tum demum non succederet determinatio si ex aequationibus propositis flueret aequatio ab omnibus variabilibus vacua. Eadem de causa patet, si proponantur quaecunque m ex aequationum integralium *completarum* numero,

earum ope k Constantes Arbitrariae et $m-k$ variabiles per reliquas variabiles et Constantes Arbitrarias exprimi posse. Nam secundum antecedentia quaecunque ex aequationibus integralibus completis deducatur aequatio neque variabilibus neque Constantibus Arbitrariis simul omnibus vacare potest. Unde ex unaquaque aequatione de aequationibus integralibus completis deducta sive variabilis sive Constans Arbitraria determinari potest, et huius vel illius valore in reliquis aequationibus propositis substituto eiusmodi determinationes continuari possunt usque dum tot Constantes Arbitrariae et variabiles per reliquas Constantes Arbitrarias et variabiles determinatae sint quot sunt aequationes propositae.

Propositis aequationibus ad aequationum integralium completarum systema pertinentibus, totidem quidem Constantes Arbitrariae vel variabiles iis determinantur sive per reliquas exprimi possunt, sed non semper Constantes Arbitrariae vel variabiles, quae aequationibus illis integralibus determinentur ex arbitrio sumi possunt. Fieri enim potest, ut aequationes illae variabilium vel Constantium Arbitrariarum quasdam omnino non involvant. Qua de re operae pretium est hanc addere Propositionem:

> III. „Aequationibus differentialibus,
>
> $$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots X_n,$$
>
> complete integratis, nisi X *identice* evanescat semper variabiles x_1, $x_2 \ldots x_n$ per x et Constantes Arbitrarias exprimere licet, quae variabilium $x_1, x_2 \ldots x_n$ expressiones Constantium Arbitrariarum respectu a se independentes erunt."

Vidimus enim §. 5., nisi X identice evanescat, ipsas $x_1, x_2 \ldots x_n$ per $f_1, f_2 \ldots f_n$, x exprimi posse; aequationibus integralibus completis autem ipsae $f_1, f_2 \ldots f_n$ Constantibus Arbitrariis aequantur unde Propositionis pars prior liquet. Inventae pro ipsis x_1 etc. expressiones si Constantium Arbitrariarum respectu a se non independentes essent, inveniri posset inter $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ aequatio a Constantibus Arbitrariis vacua, quod secundum I. fieri non potest.

Functionum a se independentium cum non evanescat Determinans (v. Comm. *de Determinantibus functionalibus*), sequitur ex antecedentibus, non evanescente X, Determinans

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n},$$

non evanescere, siquidem α_1, α_2 etc. sunt Constantes Arbitrariae per quas ipsamque x exprimuntur variabiles $x_1, x_2 \ldots. x_n$.

Mentionem hic iniiciam Paradoxi, quod errori locum dare possit. Ipsa enim X non *identice* evanescente quaeritur, an per aequationes integrales evanescere possit sive an unquam fieri possit ut aequatio,

$$X = 0,$$

ex aequationibus integralibus completis deduci queat Constantibus Arbitrariis valores tribuendo particulares. Quod non fieri posse videtur. Nam si inter aequationes integrales habetur, $X = 0$, et quod suppono non simul omnes etiam reliquae quantitates $X_1, X_2 \ldots. X_n$ evanescunt, sequitur ex aequationibus differentialibus propositis,

$$dx : dx_1 \ldots. : dx_n = X : X_1 \ldots. X_n,$$

fieri

$$x = \text{Const.}$$

Quoties autem X non identice evanescit, secundum III. variabiles omnes per ipsam x exprimere licet, unde si x Constans esset, reliquae etiam omnes quantitates $x_1, x_2 \ldots. x_n$ Constantes evaderent, ideoque ex n aequationibus integralibus sequeretur, $n+1$ quantitates $x, x_1 \ldots. x_n$ valores constantes habere, quod absurdum est. Nihilo tamen minus innumera in promtu sunt exempla quae docent sane fieri posse ut ipsa X non identice evanescens per aequationes tamen integrales particulares evanescat. Sit ex. gr. $X = x$, $X_1 = x_1$, sive sit:

$$dx : dx_1 = x : x_1;$$

haec aequatio differentialis complete integratur aequatione,

$$x = \alpha x_1,$$

in qua pro Constantis Arbitrariae α valore particulari $\alpha = 0$ sequitur,

$$X = x = 0.$$

Solvitur paradoxon observando fieri posse, ut in aequatione aliqua,

$$x_i = \Phi(x, \alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_n),$$

ipsis x; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_n$ valores constantes particulares tribuendo functio Φ formam $\frac{0}{0}$ induat, quo casu ex aequatione praecedente non sequeretur ipsam x_i quoque fore Constantem, quod supra conclusi, sed ea aequatione in hanc $0 = 0$ redeunte omnino nihil de quantitate x_i pronunciaretur. Plerumque autem si sequentibus de valoribus particularibus sermo erit Constantibus Arbitrariis tribuendis, tacite excludam valores quibus eiusmodi indeter-

minationes subnascantur, quae exceptionibus a regulis generalibus tradendis locum dare possunt.

11.

Quaecunque n aequationes finitae satisfaciant aequationibus differentialibus vulgaribus (1.) §. pr., earum ope aequationis (2.) §. pr. solutiones a se independentes f_1, $f_2 \ldots\ldots f_n$ aequantur Constantibus (§. 9.). Quae Constantes quas rursus α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ vocemus per Constantes Arbitrarias exprimuntur quibus aequationes integrales propositae afficiuntur. Quae si Constantes Arbitrariae sunt numero n,

$$\beta_1, \ \beta_2 \ \ldots\ldots \ \beta_n,$$

atque quantitates α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ earum functiones independentes fiunt, ipsae α_1 etc. evadunt Constantes omnino arbitrariae. Et cum magis generale non detur quam ut functiones f_1, $f_2 \ldots\ldots f_n$ quae per aequationes integrales Constantibus aequales fieri debent Constantibus Arbitrariis aequentur, eo casu aequationes integrales iure dicuntur *completae.* Contra si aequationes integrales propositae nullas involvunt Constantes Arbitrarias vel minore quam n numero vel si involvunt Constantes Arbitrarias numero n vel etiam maiore numero, ipsae autem $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ earum functiones non a se independentes fiunt, aequationes integrales propositae fiunt *particulares.* Revocari enim possunt ad aequationes (3.) in quibus quantitates $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$, quae per aequationes integrales completas Constantes Arbitrariae fiunt, valores determinatos induunt vel conditionibus subiiciuntur quibus aliae aliis determinantur.

Proponantur duo aequationum integralium systemata, alterum completum Constantes Arbitrarias β_1, $\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ implicans, alterum sive completum sive particulare Constantibus Arbitrariis γ_1, γ_2 etc. affectum. Utrumque cum in aequationes (3.) redeat inter se convenire debet si valores quas α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ pro altero systemate induunt valoribus quas pro altero induunt aequantur. Pro altero systemate fiunt α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ ipsarum β_1, $\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ functiones independentes ideoque etiam vice versa β_1, $\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ datae ipsarum α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ functiones; in quibus substituendo ipsarum α_1, α_2 etc. valores, quos pro altero aequationum integralium systemate induunt, prodeunt valores ipsis β_1, $\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ tribuendi ut utrique ipsarum α_1, α_2 etc. valores inter se aequales existant, sive ut ex aequationum integralium completarum systemate proposito alterum obtineatur. Habemus igitur Propositionem:

I. „E dato aequationum integralium completarum systemate alterum aequationum integralium systema quodcunque sive completum sive particulare provenit Constantes Arbitrarias idonee determinando."

Ex eadem Propositione haec fluit:

II. „Ex n aequationibus inter variabiles $x, x_1 \dots . x_n$ propositis proveniant aequationes differentiales,

$$\frac{dx_1}{dx} = A_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = A_2 \quad \dots . \quad \frac{dx_n}{dx} = A_n,$$

in quibus singulae $A_1, A_2 \dots . A_n$ variabilium $x, x_1 \dots . x_n$ functiones esse possunt maxime inter se diversae quae per n aequationes finitas propositas inter se aequales existunt: complete integratis aequationibus differentialibus praecedentibus semper fieri potest ut aequationes integrales inventae Constantes Arbitrarias idonee determinando in ipsas aequationes redeant propositas."

Varia quae ex iisdem aequationibus finitis propositis secundum antecedentia fluere possunt aequationum differentialium systemata *complete* integrabuntur variis aequationum finitarum systematis inter quae in genere ne minima quidem similitudo intercedet. Sed omnia haec aequationum integralium systemata quam maxime inter se diversa pro certis Constantium Arbitrariarum valoribus in easdem aequationes propositas redire debent.

Vidimus §. 8. aequationes differentiales altiorum ordinum quibus altissimum cuiusque variabilis dependentis differentiale per ipsas variabiles earumque inferiora differentialia exprimitur,

$$1. \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B, \quad \text{etc.}$$

revocari posse ad $p + q + \dots .$ aequationes differentiales primi ordines inter variabiles,

$$t, \; x, \; x', \dots . \; x^{(p-1)}, \qquad y, \; y' \dots . \; y^{(q-1)} \; \text{etc.}$$

ubi

$$x^{(i)} = \frac{\partial^i x}{\partial t^i}, \qquad y^{(i)} = \frac{\partial^i y}{\partial t^i} \; \text{etc.}$$

Unde etiam Constantium Arbitrariarum quibus ipsarum (1.) aequationes integrales completae efficiuntur numerus erit $p + q \dots .$ sive aequabit summam ordinum ad quos in aequationibus differentialibus propositis altissima variabilium x, y etc. differentialia ascendunt.

In formam aequationum (1.) quaecunque redeunt aequationes differentiales vulgares nisi ex iis altissima quaeque differentialia eliminare sive

aequationem deducere licet, quae tantum differentialia implicat inferiora altissimis quae reliquas aequationes afficiunt. Unde hanc habemus Propositionem:

III. „Quibuscunque propositis aequationibus differentialibus vulgaribus e quibus altissima variabilium dependentium differentialia simul omnia eliminare non licet, numerus Constantium Arbitrariarum quas integratio completa requirit aequabit summam ordinum ad quos singularum variabilium differentialia in aequationibus propositis ascendunt."

Aequationes differentiales vulgares si non gaudent forma in Prop. pr. supposita, semper per idoneas differentiationes et eliminationes ad eam formam revocari possunt ideoque etiam ad aequationes differentiales primi ordinis sicuti §. 8. monui. Hinc Theorema II. generalius sic proponi potest:

IV. „E n aequationibus inter $n+1$ variabiles propositis per iteratas differentiationes, ipsis quoque aequationibus finitis propositis in usum vocatis, quaecunque n deducantur aequationes differentiales vulgares cuiuslibet ordinis differentialia implicantes, his complete integratis semper Constantes Arbitrarias sic determinare licet ut aequationes integrales inventae in ipsas redeant aequationes propositas."

Singularibus casibus quorum §. 9. mentionem inieci praecedentis gravissimi theorematis exceptiones locum habere possunt, sed haec est ampla neque adhuc perfecta materies quam hoc loco non tangam.

12.

Determinatis variabilibus $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ut unius x functionibus, valores quos variabiles vel earum functiones induunt si statuitur $x=0$ vel ipsi x alius quilibet valor particularis x^0 tribuitur, earum appellamus valores *initiales*. Illam ipsarum $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ determinationem aequationum semper integralium ope fieri posse, nisi X identice evanescat, §. 10. III. vidimus. Sint aequationes integrales completae, Constantes Arbitrarias $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ involventes, e quarum resolutione proveniant aequationes,

$$x_i = \varphi_i(x, a_1, a_2 \ldots\ldots a_n);$$

secundum eandem Propositionem III. §. 10. erunt

$$\varphi_1, \quad \varphi_2 \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n$$

ipsarum $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ respectu a se independentes. Quod cum pro ipsius x valore indeterminato valeat, etiam pro

$$x = x^0$$

valere debet. Unde si vocamus,

$$x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0,$$

ipsarum x_1, x_2 .... x_n valores initiales ita ut sit,

$$x_i^0 = \varphi_i(x^0, \, a_1, \, a_2 \, \ldots\ldots \, a_n),$$

erunt x_1^0, x_2^0 .... x_n^0 ipsarum a_1, a_2 .... a_n functiones a se invicem independentes, ideoque pro systemate Constantium Arbitrariarum sumi possunt.

Sunt quantitates,

$$x^0, \; x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0,$$
$$x, \; x_1, \; x_2 \; \ldots\ldots \; x_n,$$

bina valorum variabilium *simultaneorum* systemata, quorum alterum si valorum *initialium* systema vocamus, alterum si placet valorum *finalium* systema vocari potest. Introducendo alterum ut systema Constantium Arbitrariarum videmus,

„per integrationem completam n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles, obtineri n aequationes inter bina quaecunque valorum variabilium simultaneorum systemata."

Quae forma aequationum integralium completarum, qua inter valores variabilium finales et initiales proponuntur, prae ceteris memorabilis est. Nam cum bina illa systemata valorum variabilium simultaneorum binis quibuscunque ipsius x valoribus x_0 et x respondeant, alterum systema cum altero commutare licet. Unde hanc habemus Propositionem:

„In unaquaque aequationum integralium inter variabiles $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ earumque valores initiales $x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ propositarum ipsas $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ respective cum ipsis $x_1^0. \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0$ commutando aut aequatio immutata manet aut alia obtinetur ex aequationum integralium numero."

Proposuimus antecedentibus duas formas praecipuas quibus aequationes integrales completae exhiberi solent, quarum alterâ exprimuntur variabiles omnes ut earum unius atque Constantium Arbitrariarum functiones, alterâ assignantur functiones solarum variabilium singulae singulis Constantibus Arbitrariis aequales. In genere molestae requiruntur aequationum resolutiones ut aequationum integralium completarum forma altera ad alteram revocetur. Quoties autem aequationes integrales completae inter variabilium valores finales atque initiales exhibentur, istarum resolutionum locum tenere potest facillima valorum initialium cum finalibus commutatio. Inventis enim ipsarum x_1, x_2 .... x_n per x, x^0, x_1^0 .... x_n^0 expressionibus,

$$x_i = \varphi_i(x, \; x^0, \; x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0),$$

valere debet. Unde si vocamus,

$$x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0,$$

ipsarum x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ valores initiales ita ut sit,

$$x_i^0 = \varphi_i(x^0, \; \alpha_1, \; \alpha_2 \; \ldots\ldots \; \alpha_n),$$

erunt x_1^0, $x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ ipsarum α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ functiones a se invicem independentes, ideoque pro systemate Constantium Arbitrariarum sumi possunt.

Sunt quantitates,

$$x^0, \; x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0,$$
$$x, \; x_1, \; x_2 \; \ldots\ldots \; x_n,$$

bina valorum variabilium *simultaneorum* systemata, quorum alterum si valorum *initialium* systema vocamus, alterum si placet valorum *finalium* systema vocari potest. Introducendo alterum ut systema Constantium Arbitrariarum videmus,

„per integrationem completam n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles, obtineri n aequationes inter bina quaecunque valorum variabilium simultaneorum systemata."

Quae forma aequationum integralium completarum, qua inter valores variabilium finales et initiales proponuntur, prae ceteris memorabilis est. Nam cum bina illa systemata valorum variabilium simultaneorum binis quibuscunque ipsius x valoribus x_0 et x respondeant, alterum systema cum altero commutare licet. Unde hanc habemus Propositionem:

„In unaquaque aequationum integralium inter variabiles $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ earumque valores initiales $x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ propositarum ipsas $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ respective cum ipsis x_1^0, $x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ commutando aut aequatio immutata manet aut alia obtinetur ex aequationum integralium numero."

Proposuimus antecedentibus duas formas praecipuas quibus aequationes integrales completae exhiberi solent, quarum alterâ exprimuntur variabiles omnes ut earum unius atque Constantium Arbitrariarum functiones, alterâ assignantur functiones solarum variabilium singulae singulis Constantibus Arbitrariis aequales. In genere molestae requiruntur aequationum resolutiones ut aequationum integralium completarum forma altera ad alteram revocetur. Quoties autem aequationes integrales completae inter variabilium valores finales atque initiales exhibentur, istarum resolutionum locum tenere potest facillima valorum initialium cum finalibus commutatio. Inventis enim ipsarum x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ per x, x^0, $x_1^0 \ldots\ldots x_n^0$ expressionibus,

$$x_i = \varphi_i(x, \; x^0, \; x_1^0, \; x_2^0 \; \ldots\ldots \; x_n^0),$$

valere debet. Unde si vocamus,

$$x_1^0, \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_n^0,$$

ipsarum x_1, x_2 .... x_n valores initiales ita ut sit,

$$x_i^0 = \varphi_i(x^0, \, a_1, \, a_2 \, \dots \, a_n),$$

erunt x_1^0, x_2^0 .... x_n^0 ipsarum a_1, a_2 .... a_n functiones a se invicem independentes, ideoque pro systemate Constantium Arbitrariarum sumi possunt.

Sunt quantitates,

$$x^0, \quad x_1^0, \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_n^0,$$
$$x, \quad x_1, \quad x_2 \quad \dots \quad x_n,$$

bina valorum variabilium *simultaneorum* systemata, quorum alterum si valorum *initialium* systema vocamus, alterum si placet valorum *finalium* systema vocari potest. Introducendo alterum ut systema Constantium Arbitrariarum videmus,

„per integrationem completam n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles, obtineri n aequationes inter bina quaecunque valorum variabilium simultaneorum systemata."

Quae forma aequationum integralium completarum, qua inter valores variabilium finales et initiales proponuntur, prae ceteris memorabilis est. Nam cum bina illa systemata valorum variabilium simultaneorum binis quibuscunque ipsius x valoribus x_0 et x respondeant, alterum systema cum altero commutare licet. Unde hanc habemus Propositionem:

„In unaquaque aequationum integralium inter variabiles $x, x_1 \dots x_n$ earumque valores initiales $x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$ propositarum ipsas $x, x_1 \dots x_n$ respective cum ipsis x_1^0, x_2^0 .... x_n^0 commutando aut aequatio immutata manet aut alia obtinetur ex aequationum integralium numero."

Proposuimus antecedentibus duas formas praecipuas quibus aequationes integrales completae exhiberi solent, quarum alterâ exprimuntur variabiles omnes ut earum unius atque Constantium Arbitrariarum functiones, alterâ assignantur functiones solarum variabilium singulae singulis Constantibus Arbitrariis aequales. In genere molestae requiruntur aequationum resolutiones ut aequationum integralium completarum forma altera ad alteram revocetur. Quoties autem aequationes integrales completae inter variabilium valores finales atque initiales exhibentur, istarum resolutionum locum tenere potest facillima valorum initialium cum finalibus commutatio. Inventis enim ipsarum x_1, x_2 .... x_n per x, x^0, x_1^0 .... x_n^0 expressionibus,

$$x_i = \varphi_i(x, \; x^0, \; x_1^0, \; x_2^0 \; \dots \; x_n^0),$$

secundum antecedentia valorum finalium et initialium commutatione, statim habetur aequationum integralium forma altera per formulas,

$$x_i^0 = \varphi_i(x^0, x, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n).$$

Adnotandum autem est illam commutationem requirere ut ipsi x^0 non valor particularis veluti $x^0 = 0$ tributus sit sed ipsa x^0 quaque perinde atque reliquae Constantes x_1^0, x_2^0 etc. indeterminata maneat. Est tamen casus quo etsi ipsi x^0 valor particularis veluti $x^0 = 0$ tributus sit, nihilominus altera aequationum integralium forma ex altera, sola elementorum commutatione, obtineatur. Ponamus enim in aequationibus differentialibus propositis,

$$dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots X_n,$$

omnes X, $X_1 \ldots\ldots X_n$ variabili x vacare: aequationes differentiales propositae nullo modo mutantur ipsam x quantitate constante augendo vel diminuendo; unde in aequationibus quoque integralibus ipsam x quantitate constante augere vel diminuere licet. Exhibitis igitur aequationibus integralibus inter x, ipsas $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ earumque valores ipsi $x = 0$ respondentes, ipsi x substituendo $x - x^0$ erunt x_1^0, $x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ variabilium x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ valores ipsi $x - x^0 = 0$ sive ipsi $x = x^0$ respondentes. Hac ratione ex unaquaque aequatione integrali,

$$1.\quad \Phi(x, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0) = 0,$$

obtinetur aequatio,

$$2.\quad \Phi(x - x^0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0) = 0.$$

Ipsas x, $x_1 \ldots\ldots x_n$ respective cum x^0, $x_1^0 \ldots\ldots x_n^0$ commutando ex aequatione praecedente (2.) eruitur altera,

$$3.\quad \Phi(x^0 - x, x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0.$$

Si in hac ponimus $x^0 = 0$ ut rursus sint x_1^0 etc. variabilium x_1 etc. valores ipsi $x = 0$ respondentes, fit

$$4.\quad \Phi(-x, x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0.$$

Unde casu proposito si Constantes x_1^0 etc. ipsarum x_1 etc. valores ipsi $x = 0$ respondentes designant, ex unaquaque aequatione integrali (1.) fluit aequatio integralis (4.), sive habemus Propositionem:

III. „Propositis aequationibus differentialibus,

$$dx : dx_1 : dx_2 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots\ldots : X_n,$$

in quibus omnes X, X_1 etc. variabilem x non involvant, ex unaquaque aequatione integrali inter ipsam x, variabiles x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ earumque valores x_1^0, $x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ ipsi $x = 0$ respondentes fluit altera, variabiles

x_1 etc. cum valoribus earum initialibus x_1^0 etc. commutando simulque mutando x in $-x$."

Casus propositus quo omnes X, X_1 etc. variabilem x non continent etiam eo distinguitur quod aequationum differentialium integrandarum numerus unitate minor fiat, et sola insuper requiratur Quadratura. Etenim complete integratis $n-1$ aequationibus differentialibus,

$$dx_1 : dx_2 \dots : dx_n = X_1 : X_2 \dots X_n,$$

quae sunt inter solas variabiles x_1, x_2 .... x_n, per earum unam x_i et $n-1$ Constantes Arbitrarias exprimantur X et X_i, invenitur n^{ta} aequatio integralis solius Quadraturae ope per formulam,

$$x - x^0 = \int \frac{X}{X_i}\, dx_i,$$

ubi x^0 est n^{ta} Constans Arbitraria.

Aequationes differentiales vulgares de aequationibus finitis propositis deductae si complete integrantur, vidimus §. 11. Constantes Arbitrarias sic determinari posse ut aequationes integrales inventae in ipsas redeant aequationes propositas. Illa determinatio commode fit si ex aequationibus propositis valores variabilium eruuntur ipsi $x = 0$ seu alii ipsius x valori particulari respondentes iique valores in aequationibus integralibus inventis substituuntur. Quo facto ipsae habentur aequationes quibus Constantes Arbitrariae determinandae sunt ut ex aequationibus integratione inventis propositae proveniant. Est ista differentiatio et redintegratio potens artis Analyticae instrumentum quo omniae transformationes, determinationes, evolutiones in series infinitas obtineantur.

De Constantibus Arbitrariis supervacaneis.

13.

Si in aequationibus integralibus, inter variabiles x, x_1 .... x_n earumque valores initiales x^0, x_1^0 .... x_n^0 exhibitis, ipsa x^0 quoque indeterminata manet, aequationes illae $n+1$ Constantes Arbitrarias involvunt ideoque maiorem numerum quam completa integratio poscit. Quin adeo nihil impedit quin numerus Constantium Arbitrariarum in singulis aequationibus adhuc maior vel etiam infinitus sit nec nisi reliquarum aequationum integralium adiumento ad minorem numerum revocari possit. Veluti si duae habentur

aequationes,

$$1.\quad u = \alpha, \quad v = \beta,$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias, iis substituere licet has,

$$2.\quad \varphi(u, v) = 0, \quad \psi(u, v) = 0,$$

designantibus φ et ψ ipsarum u, v functiones arbitrarias, quae Constantium Arbitrariarum numerum infinitum involvere possunt. Quamquam inde nullo modo generalitatem augebimus quia e binis aequationibus simultaneis (2.) sequitur u et v Constantes esse, ideoque quemcunque Constantium Arbitrariarum numerum involvant magis generale ex iis sequi non potest quam u et v Constantes Arbitrarias esse. Aequationes autem integrales quemcunque Constantium Arbitrariarum numerum involvant semper ad alias revocari posse quae non plures quam n Constantes Arbitrarias contineant facile patet. Aequationum enim integralium systema quodcunque vidimus convenire cum aequationibus sequentibus,

$$3.\quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2 \quad \ldots\ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

ubi $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ sunt functiones a se independentes, ab omnibus omnino Constantibus Arbitrariis vacuae, ipsae autem $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ Constantes quas si arbitrarias ponimus, maximum generalitatem assecuti sumus.

Propositis variabilium x, x_1 etc. expressionibus Constantes Arbitrarias involventibus quaerendum erit, an Constantium Arbitrariarum loco minor numerus functionum earum in expressiones propositae introduci possit: quod enim si fieri potest, has functiones novis Constantibus Arbitrariis aequando, Constantes Arbitrariae in expressionibus propositis ad *genuinum* numerum revocatae erunt. Veluti designantibus α et β Constantes Arbitrarias si expressiones variabilium x, x_1 etc. quantitate

$$\alpha + \beta$$

afficiuntur, dicemus eas unicam tantum involvere Constantem Arbitrariam $\gamma = \alpha + \beta$. Si *aequationes* Constantibus Arbitrariis affectae inter variabiles x, x_1 etc. proponuntur atque Constantes Arbitrariae in singulis aequationibus propositis per se consideratis ad minorem revocari non possunt numerum, id tamen in aequationibus idonee inter se combinatis locum habere posse vidimus. Ut iustus Constantium Arbitrariarum numerus quo systema aequationum natura sua affici debeat eruatur, redigatur systema in eam formam qua totidem variabiles quot sunt aequationes per reliquas variabiles et Constantes Arbitrarias exprimuntur: quibus in expressionibus si Constantes Arbitrariae ad minimum numerum revocantur, is quoque genuinus

numerus Constantium Arbitrariarum erit quo systema aequationum propositarum afficitur. Unde vice versa semper in aequationibus in formam illam redactis Constantes Arbitrariae ad eum numerum revocari possunt qui systemati aequationum propositarum genuinus est. Quoties in sequentibus de numero Constantium Arbitrariarum sermo erit quem expressiones aut aequationes propositae continent, semper genuinum numerum intelligam seu minimum ad quem eas revocare liceat. Sequitur ex antecedentibus, aequationibus integralibus completis ea forma exhibitis qua variabiles omnes per unam earum atque Constantes Arbitrarias exprimuntur, Constantes Arbitrarias in expressionibus illis semper ad numerum n revocari posse, neque igitur ad eam rem alia aequationum combinatione opus esse. Quod etiam patet si reputamus illas variabilium expressiones ex aequationibus (3.) deduci posse ad quas aequationes integrales quascunque revocare licet. Habemus igitur hanc Propositionem:

I. „Integratis aequationibus differentialibus

$$dx : dx_1 \dots dx_n = X : X_1 \dots X_n,$$

exprimantur $x_1, x_2 \dots x_n$ per x atque Constantes Arbitrarias: expressiones inventae,

$$\varphi_i(x) = x_i,$$

plures quam n Constantes Arbitrarias involvere nequeunt."

Expressis ex. gr. $x_1, x_2 \dots x_n$ per x atque valores initiales $x^0, x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$, sit

$$4. \quad x_i = \varphi_i(x, x^0, x_1^0 \dots x_n^0);$$

ut $n+1$ Constantes Arbitrariae in illis expressionibus ad iustum numerum n revocentur, ponatur in (4.), $x = 0$ ac vocentur ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functiones pro indicis i valoribus $1, 2 \dots n$ provenientes

$$\varphi_1^0, \quad \varphi_2^0 \quad \dots \quad \varphi_n^0.$$

Fieri debet ut expressiones (4.) per x solasque $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \dots \varphi_n^0$ exhiberi possint nec Constantes Arbitrarias $x^0, x_1^0 \dots x_n^0$ contineant nisi quatenus in illis earum n functionibus $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \dots \varphi_n^0$ insint. Unde ubi x pro Constante, solae $x^0, x_1^0 \dots x_n^0$ pro variabilibus habentur, erunt expressiones φ_i ipsorum $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \dots \varphi_n^0$ functiones. Quod secundum Propositionem notam (v. Comm. *de Determ. funct.*) exprimitur per aequationem quae pro ipsius x valore indefinito identice locum habere debet,

$$5. \quad 0 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x_1^0} \cdot \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x_2^0} \dots \frac{\partial \varphi_n^0}{\partial x_n^0}.$$

Haec aequatio etiam sequente ratione demonstrari potest.

Ponamus commutando variabilium valores finales et initiales abire φ_i, φ_i^0 etc. in Φ_i, Φ_i^0; secundum §. pr. illa commutatione prodit e (4.) Integrale,

$$x_i^0 = \Phi_i(x^0, x, x_1 \dots x_n),$$

sive ponendo $x^0 = 0$,

$$x_i^0 = \Phi_i^0(x, x_1 \dots x_n).$$

Aequationes praecedentes differentiatae per aequationes differentiales propositas identicae fieri debent unde prodeunt aequationes *identicae*,

$$6. \quad 0 = X\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n},$$

$$0 = X\frac{\partial \Phi_i^0}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial x_n}.$$

In aequatione posteriore si x_i mutamus in x_i^0 prodit aequatio,

$$0 = X^0 \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x^0} + X_1^0 \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_1^0} \dots + X_n^0 \frac{\partial \varphi_n^0}{\partial x_n^0},$$

siquidem ea commutatione quantitates X_i in X_i^0 abeunt. E formula praecedente tribuendo indici i valores $1, 2 \dots n$ proveniunt n aequationes, ipsarum X^0, X_1^0 etc. respectu lineares quarum ope rationes quas hae quantitates inter se tenent exprimi possunt per Coefficientes $\frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_k^0}$. Atque per notas theoriae aequationum linearium formulas invenitur, esse $X^0, X_1^0 \dots X_n^0$ inter se ut quantitates constantes quae in Determinante evanescente (5.) multiplicantur respective per $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}$. Unde aequatio (5.) demonstranda hanc induit simpliciorem formam,

$$7. \quad 0 = X^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} + X_1^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1^0} \dots + X_n^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n^0}.$$

Haec autem formula e priore formularum (6.) obtinetur rursus commutando $x, x_1 \dots x_n$ cum $x^0, x_1^0 \dots x_n^0$. E formula praecedente tribuendo indici i valores $1, 2 \dots n$ prodeunt n aequationes identicae, quibus differentiatis ipsius x respectu alia similes prodeunt.

Aequatio differentialis n^{ti} ordinis inter duas variabiles x et y semper ad n aequationes differentiales primi ordinis inter variabiles,

$$x, y, y^1 \dots y^{(n-1)},$$

revocari potest siquidem,

$$y^{(i)} = \frac{\partial^i y}{\partial x^i}.$$

Unde e Propositione I. haec sequitur notissima,

„Integrata aequatione differentiali n^{ti} ordinis inter x et y expressio ipsius y pro x plures quam n Constantes Arbitrarias non involvere potest."

Haec propositio saepius non recte eo concluditur quod ex $n+1$ aequationibus,

$$y = F(x),\quad y' = \frac{\partial F(x)}{\partial x},\quad y'' = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}\quad \ldots\ldots\quad y^{(n)} = \frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n},$$

e quibus aequatio differentialis n^{ti} ordinis proposita resultare debet, non plures quam n quantitates eliminari possint. Sane fieri potest ut e numero $n+1$ aequationum plures quam n Constantes Arbitrariae eliminari possint quamvis nullo modo ad minorem eas numerum revocare liceat. Cuius rei exempla per totum Calculum Integralem frequentissime obveniunt. Proposita ex. gr. inter x et y aequatione differentiali secundi ordinis huiusmodi,

$$8.\quad y'' = \psi(x, y),$$

cui satisfaciat aequatio integralis,

$$y = \Phi(x),$$

resultare debet (8.) e duabus aequationibus inter se combinatis,

$$y = \Phi(x),\quad y'' = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}.$$

Neque recte concluderetur ipsam $\Phi(x)$ unicam tantum Constantem Arbitrariam involvere posse quia unam tantum quantitatem e duabus aequationibus praecedentibus eliminare liceat. Bene enim constat ipsius $\Phi(x)$ expressionem completam duas involvere Constantes Arbitrarias quae nullo modo ad unam revocari possint. Et ex aequatione $\Phi(x, y, z) = 0$ ope aequationum

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

functionem arbitrariam eliminari posse constat quae Constantes Arbitrarias numero infinito involvere potest nullo modo ad finitum numerum reducendas.

Cum ad eam formam qua aequationes differentiales vulgares proposuimus quodcunque aequationum differentialium systema revocare liceat e Propositione I. generalior sequitur,

II. „Aequationum differentialium vulgarium systemate quocunque integrato, dependentium variabilium per independentem expressiones non maiorem numerum involvere possunt Constantium Arbitrariarum, quam qui ad completam integrationem requiritur."

Ut aequationum integralium completarum definitio supra proposita (§. 9.) ad eum extendatur casum quo in iis Constantes Arbitrariae insunt

supervacaneae, hoc est maiore numero quam ad completam integrationem necessario requiritur, aequationes integrales completas definire licet ut tales, e quibus Constantes Arbitrarias eliminare non liceat, sive e quibus nulla deduci possit a Constantibus Arbitrariis omnibus vacua. Qua sequitur definitione Constantium Arbitrariarum quibus aequationes integrales completae afficiuntur numerum ipsum n aut aequare aut superare ac semper aequationum integralium completarum beneficio earum n per *ipsas variabiles exprimi posse.*

Sint illae expressiones,

$$8. \quad \beta_1 = F_1, \quad \beta_2 = F_2 \quad \ldots . \quad \beta_n = F_n,$$

functiones F_1 etc. Constantibus Arbitrariis, β_1, β_2 .... β_n, prorsus vacant sed alias involvere possunt Constantes Arbitrarias,

$$\beta_{n+1}, \quad \beta_{n+2} \quad \ldots . \quad \beta_n.$$

Quae erunt supervacaneae neque generalitatem augebunt sive arbitrarie ponantur sive valores particulares induant. Nam ex his quae §. 8. demonstravi sequitur fieri F_1, F_2 .... F_n functiones *a se independentes* ipsarum f_1, f_2 .... f_n Constantibus Arbitrariis non affectarum. Eruntque F_1, F_2.... F_n a se independentes si Constantibus β_{n+1}, β_{n+2} quibus afficiuntur valores tribuantur particulares quicunque; nam dicendo eas Constantes esse Arbitrarias hoc ipsum innuitur valores iis tribui posse particulares quoscunque. Quoties autem sunt F_1, F_2 .... F_n functiones a se independentes, aequationibus (8.) integratio completa continetur seu maxima generalitate gaudens, quam igitur assequimur etiamsi ipsis β_{n+1} etc. valores particulares tribuantur. Modo certi excipiantur valores particulares pro quibus evenire potest ut functiones F_1 etc. formam $\frac{0}{0}$ induant vel ipsae F_1 etc. non amplius a se independentes sint. Veluti si habentur duae functiones,

$$F_1 = \frac{\alpha + \beta f_1 + \gamma f_2}{\delta + \epsilon f_1 + \zeta f_2}, \qquad F_2 = \frac{\alpha' + \beta' f_1 + \gamma' f_2}{\delta' + \epsilon' f_1 + \zeta' f_2},$$

designantibus α, β etc. Constantes Arbitrarias sane dicemus F_1 et F_2 functiones ipsarum f_1 et f_2 a se independentes, quamvis pro $\alpha = \delta = \alpha' = \delta' = 0$ vel pro aliis ipsarum α, β etc. certis quibusdam valoribus secus eveniet.

Sequitur ex antecedentibus haec quoque Propositio:

„Sit y functio ipsius x atque aliarum n quantitatum α_1, α_2 .... α_n, quae non ad minorem numerum revocari possunt; posito $y^{(i)} = \frac{\partial^i y}{\partial x^i}$, erunt y, y' .... $y^{(n-1)}$ ipsarum α_1, α_2 .... α_n respectu a se indepen-

dentes, sive inter x, y, y' .... $y^{(n-1)}$ non dabitur aequatio ab omnibus α_1, α_2 .... α_n vacua; unde etiam non fieri potest ut identice evanescat Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \alpha_n}.$$

Unde vice versa eo Determinante evanescente ipsas α_1, α_2 .... α_n ad minorem numerum revocare licebit sive exprimi poterit y per x ipsarumque α_1, α_2 .... α_n functiones minore quam n numero."

Nimirum si daretur inter ipsas x, y, y' .... $y^{(n-1)}$ aequatio ab omnibus α_1, α_2 .... α_n vacua haberetur ipsius x functio y, aequationi differentiali $n-1^{ti}$ ordinis satisfaciens atque n Constantes Arbitrarias involvens, quod fieri non potest. Propositio similis de pluribus ipsius x functionibus y, z etc. quantitates α_1, α_2 etc. implicantibus facile constat. Involventibus ex. gr. y et z Constantes Arbitrarias $i+k$, ad minorem numerum non reducendas, functiones y, y', y'' .... $y^{(i-1)}$, z, z', z'' .... $z^{(k-1)}$ earum respectu a se independentes erunt. Neque vero similis valet Propositio si alia sumuntur differentialia, quam se ordine insequentia. Vidimus enim antecedentibus sane dari ipsarum x, α_1, α_2 functiones y pro quibus identice fiat;

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial y''}{\partial \alpha_1} = 0,$$

in quibus tamen ipsae α_1 et α_2 ad unam quantitatem revocari non possint, scilicet functiones integratione completa aequationis

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \Phi(x, y),$$

provenientes.

14.

De Constantibus supervacaneis addere placet sequentia. Sint rursus f_1, f_2 .... f_n aequationis differentialis partialis,

$$1. \quad 0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

solutiones a se invicem independentes, ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacuae. Proponatur eiusdem aequationis solutio F, Constantibus Arbitrariis a, b etc. affecta. Cum quaelibet aequationis (1.) solutio sit ipsarum f_1, f_2 etc. functio, etiam F ipsarum f_1, f_2 .... f_n functio erit, quantitates praeterea constantes a, b etc. involvens. Qua iteratis vicibus ipsarum a, b etc. respectu differentiata rursus quantitatum f_1, f_2 .... f_n functiones prodeunt ideoque novae aequationis (1.) solutiones. Unde *propositam aequationis* (1.) *solu-*

tionem F Constantes Arbitrarias a, b etc. involventem Constantium Arbitrariarum a, b etc. respectu iteratis vicibus differentiando novae eiusdem aequationis (1.) *obtinentur solutiones.* Idem sequitur ex ipsa aequatione,

$$2.\quad 0 = X\frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Quippe cuius Coëfficientes X, X_1 etc. cum quantitates a, b etc. nullo modo involvant, aequationem (2.) ipsius a respectu $\varkappa$ vicibus, ipsius b respectu λ vicibus etc. differentiando eruimus, si $\varkappa+\lambda+\dots = \nu$,

$$0 = X\frac{\partial^{\nu+1}F}{\partial x\,\partial a^{\varkappa}\,\partial b^{\lambda}\dots} + X_1\frac{\partial^{\nu+1}F}{\partial x_1\,\partial a^{\varkappa}\,\partial b^{\lambda}\dots} + \dots + X_n\frac{\partial^{\nu+1}F}{\partial x_n\,\partial a^{\varkappa}\,\partial b^{\lambda}\dots}.$$

Unde aequationis (1.) solutiones etiam expressiones erunt omnes huiusmodi,

$$\frac{\partial^{\nu}F}{\partial a^{\varkappa}\,\partial b^{\lambda}\dots},$$

quippe secundum aequationem praecedentem pro functione f positae aequationi (1.) satisfaciunt.

Cum aequationis (1.) tantum n solutiones a se independentes extent, inter F eiusque n differentialia $\frac{\partial^{\nu}F}{\partial a^{\varkappa}\,\partial b^{\lambda}\dots}$ minoremve eorum numerum dabitur aequatio solas praeterea a et b involvens. Quae haberi potest pro aequatione differentiali in cuius solutione F, quae ipsarum a, b etc., $f_1, f_2 \dots f_n$ functio est, ipsae $f_1, f_2 \dots f_n$ vicem gerunt Constantium Arbitrariarum.

Quaeramus iam quomodo una proposita aequationis (1.) solutione F Constantes Arbitrarias a, b etc. involvente, eruantur eiusdem aequationis solutiones a Constantibus Arbitrariis vacuae quarum proposita F functio est. Quod ita fere solvere licet problema. Huius a vel b etc. respectu differentiationes instituantur iteratae dum ad differentialia perveniatur quae per antecedentia ipsasque a et b exprimere licet,

$$3.\quad \begin{aligned} \frac{\partial^{i}F}{\partial a^{i}} &= \Pi\left(F, \frac{\partial F}{\partial a} \dots \frac{\partial^{i-1}F}{\partial a^{i-1}}, a, b \dots\right) \\ \frac{\partial^{k}F}{\partial b^{k}} &= \Pi_1\left(F, \frac{\partial F}{\partial b} \dots \frac{\partial^{k-1}F}{\partial b^{k-1}}, a, b \dots\right) \\ &\text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Indices i, k etc. numerum n non superabunt, quia ad aequationes praecedentes inter ipsam F eiusque differentialia obtinendas non plures ex iis functionibus quam n quantitates eliminandae sunt, videlicet aequationis (1.) solutiones a Constantibus a, b etc. vacuae quarum proposita F functio est. Patet aequationum ope praecedentium (3.) cuncta ipsius F differentialia ipsarum a, b etc. respectu sumta exprimi posse per ipsas a, b etc. atque

valere debet. Unde si vocamus,

$$x_1^0,\quad x_2^0\quad \ldots\ldots\quad x_n^0,$$

ipsarum x_1, x_2 .... x_n valores initiales ita ut sit,

$$x_i^0 = \varphi_i(x^0,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ldots\ \alpha_n),$$

erunt x_1^0, x_2^0 .... x_n^0 ipsarum α_1, α_2 .... α_n functiones a se invicem independentes, ideoque pro systemate Constantium Arbitrariarum sumi possunt.

Sunt quantitates,

$$x^0,\quad x_1^0,\quad x_2^0\quad \ldots\ldots\quad x_n^0,$$
$$x,\quad x_1,\quad x_2\quad \ldots\ldots\quad x_n,$$

bina valorum variabilium *simultaneorum* systemata, quorum alterum si valorum *initialium* systema vocamus, alterum si placet valorum *finalium* systema vocari potest. Introducendo alterum ut systema Constantium Arbitrariarum videmus,

„per integrationem completam n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles, obtineri n aequationes inter bina quaecunque valorum variabilium simultaneorum systemata."

Quae forma aequationum integralium completarum, qua inter valores variabilium finales et initiales proponuntur, prae ceteris memorabilis est. Nam cum bina illa systemata valorum variabilium simultaneorum binis quibuscunque ipsius x valoribus x_0 et x respondeant, alterum systema cum altero commutare licet. Unde hanc habemus Propositionem:

„In unaquaque aequationum integralium inter variabiles $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ earumque valores initiales $x_1^0, x_2^0 \ldots\ldots x_n^0$ propositarum ipsas $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ respective cum ipsis x_1^0, x_2^0 .... x_n^0 commutando aut aequatio immutata manet aut alia obtinetur ex aequationum integralium numero."

Proposuimus antecedentibus duas formas praecipuas quibus aequationes integrales completae exhiberi solent, quarum alterâ exprimuntur variabiles omnes ut earum unius atque Constantium Arbitrariarum functiones, alterâ assignantur functiones solarum variabilium singulae singulis Constantibus Arbitrariis aequales. In genere molestae requiruntur aequationum resolutiones ut aequationum integralium completarum forma altera ad alteram revocetur. Quoties autem aequationes integrales completae inter variabilium valores finales atque initiales exhibentur, istarum resolutionum locum tenere potest facillima valorum initialium cum finalibus commutatio. Inventis enim ipsarum x_1, x_2 .... x_n per x, x^0, x_1^0 .... x_n^0 expressionibus,

$$x_i = \varphi_i(x,\ x^0,\ x_1^0,\ x_2^0\ \ldots\ldots\ x_n^0),$$

exprimatur formando differentialia $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}$ etc. usque dum perveniatur ad differentiale quod per antecedentia ipsamque a exprimi possit,

$$4. \quad \frac{\partial^m F}{\partial a^m} = \Pi\left(F, \frac{\partial F}{\partial a}, \ldots \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a^{m-1}}, a\right).$$

Quibus positis, proveniunt secundum antecedentia functiones quaesitae ex ipsis,

$$F, \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}, \ldots \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a^{m-1}},$$

Constanti a tribuendo valorem particularem quemcunque a^0. Idem considerationibus sequentibus patet. E supra traditis §. 7. aequationi differentiali n^{ti} ordinis (4.) substitui potest systema m aequationum differentialium primi ordinis inter variabiles,

$$F, \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \ldots \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a^{m-1}}, a.$$

Cuius integratione completa exprimi potest F per a atque m Constantes Arbitrarias; pro quibus ubi sumuntur ipsorum,

$$F, \frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \ldots \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a^{m-1}},$$

valores initiales seu ipsi $a = a^0$ respondentes, proposito satisfit.

Sequitur ex antecedentibus etiam, propositis aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots X_n,$$

ex uno Integrali

$$F = \beta,$$

si functio F plures involvat Constantes Arbitrarias, plura alia derivari posse. Ubi enim per methodum praecedentibus explicatam ex una aequationis (1.) solutione F deducuntur m solutiones φ_1^0, $\varphi_2^0 \ldots$, φ_m^0 a se independentes, erunt etiam,

$$\varphi_1^0 = \beta_1, \quad \varphi_2^0 = \beta_2 \ldots \varphi_m^0 = \beta_m,$$

aequationum differentialium vulgarium propositarum Integralia, designantibus β_1, β_2 etc. Constantes Arbitrarias.

15.

Proposita aequatione integrali

$$u = 0,$$

differentiando et in aequatione proveniente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

substituendo aequationes differentiales propositas,

$$1. \quad dx : dx_1 \ldots . \, dx_n = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

eruitur

$$2. \quad 0 = X\frac{\partial u}{\partial x} + X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots . + X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Quae si $u = 0$ est aequationum (1.) Integrale identica esse debet aequatio. Si (2.) identica non est, quaeri potest an ei satisfiat ipsa advocata proposita $u = 0$. Si vero utrumque locum non habet, erit (2.) nova aequatio integralis. E qua deinde per eandem methodum tertia derivari poterit et sic pergere licet usque dum perveniatur ad aequationem quae per aequationes eam antecedentes identica fit ideoque iis nihil novi addit. Qua ratione fieri potest ut ex una aequatione integrali totum aequationum integralium derivetur systema.

Brevitatis gratia *aequationem integralem completam* dicam, quae ad aequationum integralium completarum systema pertinere potest seu cui per aequationum integralium completarum systema satisfieri potest, Constantibus Arbitrariis nulli conditioni aut determinationi particulari subiectis. Contra dicam aequationem integralem *particularem* quae ad completarum systema pertinere non potest sive cui satisfieri non potest per aequationes integrales completas nisi certas inter Constantes Arbitrarias ponendo relationes. Ex aequationum integralium completarum systemate cum ipsae aequationes differentiales propositae fluant, unaquaeque aequatio per differentiationem et aequationum differentialium propositarum substitutionem iteratas ex aequatione integrali completa derivata et ipsa aequatio integralis completa est. Nam et propositae et derivatis per aequationum integralium completarum systema satisfieri potest.

Quaeramus iam propositis aequationibus differentialibus (1.) an data aequatio quaecunque $u = 0$ sit aequatio integralis, et si aequatio integralis est, quomodo inveniatur aequationum integralium systema maxime generale completum vel particulare ad quod pertinere possit. Aequatione proposita unius respectu variabilium, x_n, resoluta prodeat,

$$x_n = A_n \quad \text{sive} \quad A_n - x_n = 0.$$

e qua aequatione per methodum propositam eruitur haec,

$$X\frac{\partial A_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial A_n}{\partial x_1} \ldots . + X_{n-1}\frac{\partial A_n}{\partial x_{n-1}} - X_n = u_1 = 0;$$

quae substituendo ipsi x_n expressionem A_n in aequationem inter solas x,

$x_1 \ldots . x_{n-1}$ abit. Qua ipsius x_{n-1} respectu resoluta prodeat,

$$x_{n-1} = A_{n-1} \quad \text{sive} \quad A_{n-1} - x_{n-1} = 0,$$

e qua aequatione obtinetur haec,

$$X\frac{\partial A_{n-1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial A_{n-1}}{\partial x_1} \ldots . + X_{n-2}\frac{\partial A_{n-2}}{\partial x_{n-2}} - X_{n-1} = u_2 = 0,$$

quae substituendo ipsi x_n expressionem A_n ac deinde ipsi x_{n-1} expressionem A_{n-1} in aequationem inter solas $x, x_1 \ldots . x_{n-2}$ abit. Hac ratione pergendo, generaliter obtinetur,

$$2. \quad x_{n-m} = A_{n-m},$$

designante A_{n-m} solarum $x, x_1 \ldots . x_{n-m-1}$ expressionem; eaque formula eruitur ex aequatione,

$$3. \quad X\frac{\partial A_{n-m+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial A_{n-m+1}}{\partial x_1} \ldots . + X_{n-m}\frac{\partial A_{n-m+1}}{\partial x_{n-m}} - X_{n-m+1} = u_m = 0,$$

in qua supponimus beneficio aequationum,

$$x_n = A_n, \quad x_{n-1} = A_{n-1} \quad \ldots . . \quad x_{n-m+1} = A_{n-m+1},$$

ipsas $X, X_1 \ldots . X_{n-m+1}$ expressas esse per solas $x, x_1 \ldots . x_{n-m}$. Quoties hac ratione $n+1$ aequationes a se independentes erui possunt,

$$u = 0, \quad u_1 = 0 \quad \ldots . \quad u_n = 0,$$

proposita non est aequatio integralis. Neque enim fieri potest ut aequatio proposita pertinere possit ad n aequationes finitas e quibus aequationes differentiales propositae fluant; namque ex n aequationibus finitis sequerentur $n+1$ aequationes finitae quod absurdum est. Contra si evenit ut pro numero m minore aut non maiore quam n aequatio $u_m = 0$ identica fiat neque igitur ex ea valor ipsius x_{n-m} peti vel nova aequatio obtineri possit, aequatio proposita erit aequatio integralis simulque aequationes erunt integrales omnes quae ex ea deductae sunt,

$$4. \quad u = 0, \quad u_1 = 0 \quad \ldots . \quad u_{m-1} = 0,$$

vel

$$5. \quad x_n = A_n, \quad x_{n-1} = A_{n-1} \quad \ldots . \quad x_{n-m+1} = A_{n-m+1}.$$

Quod patet demonstrando aequationibus m praecedentibus alias addi posse $n-m$ tales ut ex omnibus n aequationibus fluant aequationes differentiales propositae (1.). Sint illae $n-m$ aequationes,

$$6. \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_{n-m} = 0,$$

quas aequationum (5.) ope inter solas $x, x_1 \ldots . x_{n-m}$ exhibere licet. Earundem aequationum (5.) ope ipsis quoque $X, X_1 \ldots . X_{n-m}$ per solas variabiles $x, x_1 \ldots . x_{n-m}$ exhibitis, ex aequationibus differentialibus quibus satis-

fieri debet eligantur sequentes,

$$7. \quad dx : dx_1 \ldots . dx_{n-m} = X : X_1 \ldots . : X_{n-m}.$$

Quae ut locum habeant nihil facere possunt aequationes (5.) cum inter solas sint variabiles $x, x_1 \ldots . x_{n-m}$; qua de re aequationibus differentialibus (7.) per solas aequationes (6.) satisfieri debet. Quod ubi fit, ex aequationibus (4.) vel (5.) et aequationibus (6.) fluunt aequationes differentiales propositae (1.). Nam primum ex aequatione identica (3.), ipsis (7.) substitutis, fit secundum (5.),

$$X \frac{\partial A_{n-m+1}}{\partial x} = X \frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial x} = X_{n-m+1},$$

unde erit

$$8. \quad dx : dx_1 \ldots . : dx_{n-m+1} = X : X_1 \ldots . : X_{n-m+1}.$$

Simili ratione ex aequatione $u_{m-1} = 0$ fluit e (8.), ponendo in (3.) $m-1$ loco m,

$$X \frac{\partial A_{n-m+2}}{\partial x} = X \frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial x} = X_{n-m+2},$$

unde fit:

$$dx : dx_1 \ldots . : dx_{n-m+2} = X : X_1 \ldots . : X_{n-m+2}.$$

Et sic pergere licet usque dum omnes erutae sint aequationes propositae (1.). Itaque si m aequationibus (4.) de una $u = 0$ deductis accedunt ipsarum (7.) aequationes integrales $n-m$, habetur quod propositum est n aequationum finitarum systema quod et aequationem $u = 0$ amplectitur et aequationibus differentialibus (1.) satisfacit. Eritque systema illud aequationum integralium maxime generale ad quod proposita $u = 0$ pertinere potest, si pro aequationibus (6.) sumuntur ipsarum (7.) aequationes integrales *completae*.

Ponamus Constantes Arbitrarias quae systema aequationum (4.) afficiunt revocari posse ad numerum μ, qui aut aequabitur aut inferior erit numero Constantium Arbitrariarum quae aequationem propositam $u = 0$ afficiunt. Etenim evenire potest ut Constantes Arbitrariae omnibus aequationibus (4.) idonee combinatis ad minorem revocentur numerum quamvis in una proposita $u = 0$ ad minorem numerum revocari nequeant. Cum illis μ aliae $n-m$ Constantes Arbitrariae per integrationem completam aequationum differentialium (6.) accedant, systema aequationum integralium maxime generale, ad quod aequatio proposita pertinet, non plures quam

$$\mu + n - m$$

Constantes Arbitrarias implicare potest. Qua de re, si $\mu < m$ aequatio proposita non esse potest completa; si $\mu = m$ completa esse potest; si $\mu > m$,

fieri debet ut illae $\mu+n-m$ Constantes quae aequationes (4.) afficiunt et aequationum (6.) integratione completa accedunt in numerum n vel etiam minorem numerum coalescant quia aequationum integralium vel completarum systema non plures quam n Constantes Arbitrarias involvere potest. Casu igitur postremo quo $\mu > m$ fieri potest ut generalitati non detrahatur, si inter μ Constantes Arbitrarias quas aequationes (4.) involvunt, relationes particulares ponuntur vel si aequationes differentiales (6.) non complete integrantur.

Antecedentia exemplo simplici illustrabo. Proponatur aequatio differentialis secundi ordinis, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ sive sint inter tres variabiles, x, y, y' datae aequationes differentiales

$$dx : dy : dy' = 1 : y' : 0;$$

erit aliqua aequatio integralis,

$$y - b = (x-a)y' + cy'y',$$

sive

$$9. \quad y - b = (x-a)\frac{dy}{dx} + c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

In qua aequatione insunt tres Constantes Arbitrariae a, b, c, quae in illa quidem aequatione ipsa ad minorem revocari numerum non possunt. Resolutione aequationis quadraticae facta aequationem antecedentem sic exhibere licet,

$$\frac{2c\,dy + (x-a)\,dx}{\sqrt{(4c(y-b)+(x-a)^2)}} = dx,$$

qua complete integrata eruitur,

$$\sqrt{(4c(y-b)+(x-a)^2)} = x + e,$$

designante e Constantam Arbitrariam integratione completa accedentem. Quadremus aequationem ut radicale abeat, prodit tollendo terminos se mutuo destruentes,

$$y = \frac{a+e}{2c}x + \frac{ee+4bc-aa}{4c}.$$

Quae aequatio generalior non est atque haec,

$$y = \alpha x + \beta,$$

in qua α et β Constantes Arbitrariae sunt; unde aequatio maxime generalis, qua aequatio (9.) tres Constantes Arbitrarias involvens integratur, non plures quam duas admittit Constantes Arbitrarias. Et salva generalitate ponere licet in aequatione (9.) $a = 0$, $b = 0$ vel etiam Constantem Arbitrariam integratione completa accedentem $e = 0$.

Unde e Propositione I. haec sequitur notissima.

„Integrata aequatione differentiali n^{ti} ordinis inter x et y expressio ipsius y pro x plures quam n Constantes Arbitrarias non involvere potest."

Haec propositio saepius non recte eo concluditur quod ex $n+1$ aequationibus,

$$y = F(x),\quad y' = \frac{\partial F(x)}{\partial x},\quad y'' = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}\ \ldots .\ y^{(n)} = \frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n},$$

e quibus aequatio differentialis n^{ti} ordinis proposita resultare debet, non plures quam n quantitates eliminari possint. Sane fieri potest ut e numero $n+1$ aequationum plures quam n Constantes Arbitrariae eliminari possint quamvis nullo modo ad minorem eas numerum revocare liceat. Cuius rei exempla per totum Calculum Integralem frequentissime obveniunt. Proposita ex. gr. inter x et y aequatione differentiali secundi ordinis huiusmodi,

$$8.\quad y'' = \psi(x, y),$$

cui satisfaciat aequatio integralis,

$$y = \Phi(x),$$

resultare debet (8.) e duabus aequationibus inter se combinatis,

$$y = \Phi(x),\quad y'' = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}.$$

Neque recte concluderetur ipsam $\Phi(x)$ unicam tantum Constantem Arbitrariam involvere posse quia unam tantum quantitatem e duabus aequationibus praecedentibus eliminare liceat. Bene enim constat ipsius $\Phi(x)$ expressionem completam duas involvere Constantes Arbitrarias quae nullo modo ad unam revocari possint. Et ex aequatione $\Phi(x, y, z) = 0$ ope aequationum

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

functionem arbitrariam eliminari posse constat quae Constantes Arbitrarias numero infinito involvere potest nullo modo ad finitum numerum reducendas.

Cum ad eam formam qua aequationes differentiales vulgares proposuimus quodcunque aequationum differentialium systema revocare liceat e Propositione I. generalior sequitur,

II. „Aequationum differentialium vulgarium systemate quocunque integrato, dependentium variabilium per independentem expressiones non maiorem numerum involvere possunt Constantium Arbitrariarum, quam qui ad completam integrationem requiritur."

Ut aequationum integralium completarum definitio supra proposita (§. 9.) ad eum extendatur casum quo in iis Constantes Arbitrariae insunt

complete integrantur, sed sufficere ut vel una data sit aequatio quaecunque ad aequationum integralium completarum systema pertinens.

Ex antecedentibus criterium quoque certum habetur quo cognoscatur an aequatio integralis proposita $u = 0$ sit completa; videlicet non fieri debet ut ex aequationibus de proposita deductis Constantes Arbitrariae eliminari possint sive alia ex aequationibus illis obtineri possit aequatio ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacua. Hoc enim si fieri non potest, secundum antecedentia aequationibus e proposita deductis semper conciliare licet formam aequationum (1.), in quibus sunt $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$ solutiones aequationis (3.) a se independentes. Sint

$$\varphi_{m+1}, \quad \varphi_{m+2} \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n,$$

reliquae aequationis (3.) solutiones a se ipsis et a praecedentibus $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$ independentes; obtinentur aequationes integrales completae, omnes n aequationis (3.) solutiones a se independentes $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$ aequando Constantibus Arbitrariis. Designantibus igitur

$$\gamma_1, \quad \gamma_2 \quad \ldots\ldots \quad \gamma_{n-m}$$

novas Constantes Arbitrarias, formabunt aequationes,

$$5. \quad \begin{array}{l} \varphi_1 = \beta_1, \quad \varphi_2 = \beta_2 \quad \ldots\ldots \quad \varphi_m = \beta_m \\ \varphi_{m+1} = \gamma_1, \quad \varphi_{m+2} = \gamma_2 \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n = \gamma_{n-m} \end{array}$$

aequationum integralium completarum systema e quo ipsa quoque proposita $u = 0$ fluit. Quippe aequationes (1.) satisfacere debent aequationibus (4.) §. pr. quarum resolutione obtinebantur.

Si numerus k Constantium Arbitrariarum quas aequatio proposita involvit non aequatur numero m aequationum e proposita derivatarum, aequationis (3.) solutiones a se independentes $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$ implicabunt Constantes Arbitrarias,

$$\beta_{m+1}, \quad \beta_{m+2} \quad \ldots\ldots \quad \beta_k.$$

Eruntque illae aequationis (1.) solutiones $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$ a se independentes etiamsi ipsis β_{m+1} etc. valores tribuantur particulares, quia quae ad valores indefinitos valent ad omnes valores particulares valere debent (§. 13.). Unde semper statuendo $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2} \ldots\ldots \varphi_n$ esse aequationis (2.) solutiones a se invicem et ab ipsis $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$ independentes, patet etiamsi tribuantur $k-m$ Constantibus Arbitrariis β_{m+1} etc. valores particulares, esse $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$ aequationis (2.) solutiones a se independentes, ideoque (5.) aequationes integrales completas.

Antecedentibus sequens demonstrata est Propositio:

„Si ex aequationibus de una aequatione integrali proposita derivatis omnes Constantes Arbitrariae eliminari nequeunt, aequatio integralis proposita necessario erit completa; et quoties aequatio illa proposita Constantes Arbitrarias plures involvit quam ex ea derivantur aequationes, non minus ea aequatio integralis erit completa etiamsi Constantibus Arbitrariis quibusdam, quarum numerus illum aequat excessum, valores tribuantur particulares."

Dicimus aequationem integralem propositam involvere Constantes Arbitrarias *supervacaneas*, si quibusdam e Constantium Arbitrariarum numero valores tribuere licet particulares ac nihilominus systema aequationum integralium maxime generale ad quod aequatio sic proveniens pertinere potest idem fit sive eadem generalitate gaudet atque systema aequationum integralium maxime generale ad quod ipsa proposita pertinere potest. Quemadmodum antecedentibus vidimus, utramque aequationem pertinere posse ad systema aequationum integralium completarum. Qua in definitione supponi potest, in ipsa aequatione proposita Constantes Arbitrarias jam ad minimum revocatas esse numerum. Si definitionem propositam tenemus, ex antecedentibus hoc sequitur Corollarium:

„Ex aequatione integrali completa Constantes Arbitrarias non involvente supervacaneas tot fluunt aequationes integrales quot ipsam Constantes Arbitrariae afficiunt; quoties igitur proposita involvit n Constantes Arbitrarias quarum nulla supervacanea est, ex una illa aequatione totum aequationum integralium completarum derivari potest systema."

Videlicet si maior esset numerus aequationum quae e proposita derivantur, Constantium Arbitrariarum numero quas involvit, eliminari possent ex aequationibus illis Constantes Arbitrariae neque igitur pertinere posset proposita ad systema aequationum integralium completarum (§. 10. II.); si minor esset, vidimus Constantium Arbitrariarum aliquot salva generalitate valores induere posse particulares sive propositam Constantes Arbitrarias involvere supervacaneas.

Sequitur ex antecedentibus etiam hoc theorema:

„Propositis aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$dx : dx_1 \ldots . : dx = X : X_1 \ldots . : X_n,$$

si datur una quaecunque aequatio integralis completa Constantes Arbitrarias non involvens supervacaneas, ex ea tot derivantur solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

quot afficiunt propositam Constantes Arbitrariae; quoties igitur aequatio integralis proposita involvit n Constantes Arbitrarias quarum nulla supervacanea, ex una illa aequatione derivari potest aequationis differentialis partialis propositae solutio generalis."

Videlicet si nulla adest Constans Arbitraria supervacanea, fit antecedentibus $k = m$, ideoque aequationis differentialis partialis solutiones $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ $\ldots \varphi_m$, antecedentibus ex una aequatione proposita eiusque derivatis inventae, eodem sunt numero atque Constantes Arbitrariae propositam afficientes. Si $k = m = n$, habentur ea ratione aequationis differentialis partialis propositae n solutiones a se independentes quarum functio arbitraria erit solutio generalis.

Bene tenendum est, ad solutionem aequationis differentialis partialis obtinendam fieri debere, ut aequatio integralis quae proponitur sit completa. Nam etsi totum detur systema aequationum integralium particularium eaeque Constantium Arbitrariarum numerum involvant tantum unitate minorem quam completae, ex iis ne una quidem solutio aequationis differentialis partialis propositae erui potest.

17.

Quaeramus iam quem fructum percipere liceat e Constantibus Arbitrariis supervacaneis aequationem integralem completam afficientibus. Iisdem positis atque in §. pr., si aequatio integralis completa $u = 0$ praeter Constantes Arbitrarias $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_m$ involvit supervacaneas $\beta_{m+1}, \beta_{m+2} \ldots\ldots \beta_k$, has ipsae quoque involvunt functiones $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$, unde per methodum §. 14. traditam novae erui possunt aequationis (3.) §. pr. solutiones. Sunt enim solutionum illarum differentialia partialia prima vel altiora ipsarum β_{m+1}, β_{m+2} etc. respectu sumta et ipsa aequationis (3.) §. pr. solutiones. Ex aequatione proposita eiusque derivatis obtinebatur,

$$1. \quad \beta_1 = \varphi_1, \quad \beta_2 = \varphi_2 \quad \ldots\ldots \quad \beta_m = \varphi_m,$$

unde vice versa substituendo aequationes (1.) aequatio proposita $u = 0$ identica evadere debet. Quam aequationem identicam Constantium Arbitrariarum supervacanearum β_{m+1}, β_{m+2} etc. respectu differentiemus, et post

differentiationem in differentialibus ipsius u partialibus functionum $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ valores restituamus constantes $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$: prodibunt $p-m$ aequationes huiusmodi,

$$2.\quad \frac{\partial u}{\partial \beta_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_{m+i}}+\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_{m+i}}\dots+\frac{\partial u}{\partial \beta_m}\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta_{m+i}}+\frac{\partial u}{\partial \beta_{m+i}}=0.$$

Quoniam autem sunt,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_{m+i}},\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_{m+i}}\quad\dots\quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta_{m+i}},$$

et ipsae aequationis (3.) §. pr. solutiones ideoque aequationum differentialium vulgarium propositarum integratione Constantibus aequantur, haec habemus Propositionem:

„Aequatio integralis completa $u=0$ Constantes Arbitrarias involvat $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ quarum $k-m$ sint supervacaneae, dabuntur $k-m$ aequationes huiusmodi,

$$3.\quad \gamma_1\frac{\partial u}{\partial \beta_1}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\dots+\gamma_m\frac{\partial u}{\partial \beta_m}+\frac{\partial u}{\partial \beta_{m+i}}=0,$$

vel generalius $k-m$ aequationes huiusmodi,

$$4.\quad \gamma_1\frac{\partial u}{\partial \beta_1}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\dots+\gamma_k\frac{\partial u}{\partial \beta_k}=0,$$

designantibus γ_1, γ_2 etc. quantitates Constantes."

Aequationes (4.) obtinentur addendo $k-m$ aequationes (3.) respective per Constantes $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2} \dots \gamma_k$ multiplicatas; vice versa proveniunt (3.) resolvendo $k-m$ aequationes (4.) inter ipsas $\frac{\partial u}{\partial \beta_{m+1}}, \frac{\partial u}{\partial \beta_{m+2}} \dots \frac{\partial u}{\partial \beta_k}$ lineares. *Aliae erui* possunt aequationes propositam $u=0$ Constantium Arbitrariarum supervacanearum respectu *iteratis vicibus* differentiando.

Aequationes (3.) in aequationes (1.) redeunt aut novae sunt aequationes integrales. Illo casu ad aequationes e proposita $u=0$ per differentiationem variabilium ipsarumque aequationum differentialium propositarum substitutionem deductas etiam perveniri videmus differentiatione Constantium Arbitrariarum respectu facta. Altero casu hoc methodo ad eas quoque aequationes integrales pervenitur quae nullo modo per variabilium differentiationem obtineri possunt. De quibus diversis casibus sequentia observo.

Sunt $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ aequationis differentialis partialis,

$$5.\quad 0=X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

solutiones a se independentes, Constantibus Arbitrariis

$$\beta_{m+1},\ \beta_{m+2}\ \dots\ \beta_k$$



affectae. Sit $m' \geqq m$ ac ponamus functiones $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_m$ exprimi posse per eiusdem aequationis (5.) solutiones ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacuas,

$$f_1, f_2 \dots f_{m'},$$

neque per minorem eiusmodi solutionum numerum; quae expressiones adhuc Constantibus Arbitrariis affectae erunt $\beta_{m+1}, \beta_{m+2} \dots \beta_k$. Per aequationes finitas quibus integrantur aequationes,

$$6. \quad \partial x : \partial x_1 \dots : \partial x_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

aequantur $f_1, f_2 \dots f_{m'}$, Constantibus quas vocemus

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{m'}.$$

Ut ad easdem aequationes integrales pertineant proposita $u = 0$ eiusque derivatae Constantes $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{m'}$ satisfacere debent m aequationibus, quae ex aequationibus (1.) proveniunt in functionibus Φ_1 etc. substituendo ipsarum $f_1, f_2 \dots f_{m'}$ valores constantes $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{m'}$. Dabuntur igitur inter m' Constantes $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{m'}$ ipsasque $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ aequationes m', unde illarum Constantium $m' - m$ veluti,

$$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m'},$$

pro Arbitrariis atque ab ipsis $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ prorsus independentibus habere licet, reliquae deinde $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ erunt datae functiones ipsarum

$$\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k, \quad \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m'}.$$

Quoties $m' = m$, Constantes $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ per ipsas $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ determinabuntur atque aequationum (1.) locum tenebant sequentes,

$$\alpha_1 = f_1, \quad \alpha_2 = f_2 \quad \dots \quad \alpha_m = f_m,$$

quarum dextrae partes Constantibus Arbitrariis vacant. Quo igitur casu k Constantes Arbitrariae aequationes (1.) afficientes ad minorem numerum m revocari possunt.

Obtinebantur aequationes (3.) ex aequationibus (1.) simul pro functionum $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_m$ differentialibus Constantium Arbitrariarum $\beta_{m+1}, \beta_{m+2} \dots \beta_k$ respectu sumtis, valores constantes substituendo quos per ipsorum (6.) aequationes integrales induunt. Sunt illa differentialia partialia datae functiones quantitatum,

$$f_1, f_2 \dots f_{m'}, \quad \beta_{m+1}, \beta_{m+2} \dots \beta_k;$$

per ipsarum (6.) aequationes integrales autem fieri supposui

$$7. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2 \quad \dots \quad f_{m'} = \alpha_{m'},$$

unde valores illi constantes γ_1, γ_2 etc. sunt datae functiones ipsarum

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{m'}, \quad \beta_{m+1}, \beta_{m+2} \dots \beta_k.$$

Quoties igitur $m' = m$ sive quoties m aequationes (1.) ad alias revocari possunt, in quibus tantum m Constantes Arbitrariae insunt, erunt γ_1, γ_2 etc. datae ipsorum $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ functiones. Quoties autem $m' > m$ implicabunt γ_1, γ_2 etc. praeter $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ novas $m'-m$ Constantes Arbitrarias ab ipsis $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ prorsus independentes. Porro si $m' = m$ aequationes (3.) et si quae aliae ex iis eadem methodo deducuntur qua ipsae e proposita $u = 0$ obtinebantur, alias non suppeditabunt aequationes nisi propositam eiusque derivatas (1.). Si vero $m' > m$, praeter has suppeditabunt $m'-m$ aequationes novas, videlicet Integralia,

$$f_{m+1} = \alpha_{m+1}, \quad f_{m+2} = \alpha_{m+2} \quad \ldots\ldots \quad f_{m'} = \alpha_{m'},$$

in quibus ipsae α_{m+1} etc. sunt Constantes Arbitrariae ab ipsis $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ independentes.

Sint

$$u = 0, \quad u_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad u_m = 0$$

aequationes omnes e proposita $u = 0$ differentiatione variabilium deductae, poterit in formula (2.) ipsius u loco poni u_1 vel u_2 etc. Unde si aequatio proposita $u = 0$ Constantibus Arbitrariis $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{m+1}$ afficitur sive unam implicat Constantem Arbitrariam supervacaneam, prodeunt e (2.) aequationes sequentes,

$$8. \quad \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{\partial u}{\partial \beta_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u}{\partial \beta_2} \ldots + \gamma_{m+1} \dfrac{\partial u}{\partial \beta_{m+1}} = 0, \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \beta_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \beta_2} \ldots + \gamma_{m+1} \dfrac{\partial u_1}{\partial \beta_{m+1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_m}{\partial \beta_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_m}{\partial \beta_2} \ldots + \gamma_{m+1} \dfrac{\partial u_m}{\partial \beta_{m+1}} = 0. \end{cases}$$

Per notas formulas aequationum algebraicarum linearium resolutionem spectantes prodeunt e (8.) aequationes:

$$9. \quad \gamma_1 : \gamma_2 \ldots : \gamma_{m+1} = U : U_1 \ldots : U_{m+1},$$

designantibus U, U_1 etc. Determinantia differentialium partialium $\frac{\partial u_i}{\partial \beta_1}$, $\frac{\partial u_i}{\partial \beta_2}$ etc. Si aequatio proposita pluribus quam $m+1$ Constantibus Arbitrariis afficitur, pro earum $m+1$ quibuslibet formulae habentur antecedentium (8.) similes.

Sint Constantes Arbitrariae quas aequatio integralis $u = 0$ variabilium valores initiales x^0, $x_1^0 \ldots x_n^0$, quarum numerus iustum Constantium Arbitrariarum numerum n unitate excedit. Unde una erit supervacanea

ideoque extare debet aequatio integralis huiusmodi,

$$10.\quad 0 = \gamma\frac{\partial u}{\partial x^0} + \gamma_1\frac{\partial u}{\partial x_1^0} \dots + \gamma_n\frac{\partial u}{\partial x_n^0},$$

in qua γ, γ_1 etc. Constantes sunt. Cuiusmodi aequationem revera locum habere sic patet. Ipsas $x, x_1 \dots x_n$ cum $x^0, x_1^0 \dots x_n^0$ commutando abeat aequatio $u = 0$ in hanc,

$$v = 0,$$

quae secundum §. 12. et ipsa aequatio integralis est. Eadem commutatione abeunt

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \dots \frac{\partial v}{\partial x_n},$$

respective in

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1^0} \dots \frac{\partial u}{\partial x_n^0}.$$

Differentiando iam aequationem $v = 0$ ac substituendo aequationes differentiales propositas

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

obtinemus aequationem,

$$X\frac{\partial v}{\partial x} + X_1\frac{\partial v}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial v}{\partial x_n} = 0.$$

In qua secundum §. citatam rursus $x, x_1 \dots x_n$ cum $x^0, x_1^0 \dots x^0$ commutare licet, quo facto eruimus

$$X^0\frac{\partial u}{\partial x^0} + X_1^0\frac{\partial u}{\partial x_1^0} \dots + X_n^0\frac{\partial u}{\partial x_n^0} = 0,$$

siquidem ipsae X^0 etc. sunt Coefficientium X etc. valores initiales. Unde eruta est aequatio forma aequationis (10.) gaudens quae quaerebatur.

18.

Examinabo iam casum quo aequatio integralis proposita non est completa. Secundum §. 16. eo casu fieri debet ut e m aequationibus integralibus de proposita fluentibus omnes k Constantes Arbitrariae $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ eliminari possint. Quod semper evenit si $k < m$, sed evenire etiam potest si $k \geqq m$. Ponamus ex i illarum aequationum provenire,

$$1.\quad \beta_1 = \Phi_1,\ \beta_2 = \Phi_2,\ \dots\ \beta_i = \Phi_i,$$

(ubi $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_i$ ab ipsis $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_i$ vacuae sint); ipsi autem β_1 etc. respecti' functiones Φ_1 etc. substituendo e reliquis $m - i$ aequationibus reliquas omnino abire Constantes Arbitrarias $\beta_{i+1}, \beta_{i+2} \dots \beta_k$. Haec est suppositio maxime generalis, quae si $i = m$ in praecedentem abit qua $u = 0$

aequatio integralis completa erat, si $i=0$ ad eum pertinet casum quo aequatio integralis proposita omnino nullam involvit Constantem Arbitrariam. Ope $m-i$ aequationum quae eliminatis omnibus Constantibus Arbitrariis obtinentur, determinentur

$$x_{n-m+i+1},\quad x_{n-m+i+2}\quad \ldots\ldots\quad x_n$$

per reliquas variabiles earumque substituantur expressiones cum in φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_i$ tum in quantitatibus,

$$X,\ X_1\ \ldots\ldots\ X_{n-m+i};$$

similibus ratiociniis atque §. 16. usus sum, probatur fieri φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_i$ solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$2.\quad X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_{n-m+i}\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+i}}=0.$$

Unde designantibus

$$\varphi_{i+1},\quad \varphi_{i+2}\quad \ldots\ldots\quad \varphi_{n-m+i}$$

reliquas aequationis (2.) solutiones atque

$$\delta_1,\quad \delta_2\quad \ldots\ldots\quad \delta_{n-m}$$

novas Constantes Arbitrarias, obtinentur $n-m$ novae aequationes integrales

$$3.\quad \varphi_{i+1}=\delta_1,\quad \varphi_{i+2}=\delta_2\quad \ldots\ldots\quad \varphi_{n-m+i}=\delta_{n-m},$$

quae iunctae et i aequationibus (1.) et $m-i$ aequationibus ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacuis constituunt aequationum integralium ad quas proposita pertinere potest systema maxime generale. In quo Constantibus Arbitrariis,

$$\beta_{i+1},\quad \beta_{i+2}\quad \ldots\ldots\quad \beta_k$$

quae functiones φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_i$ afficiunt, salva generalitate tribuere licet valores particulares. Quippe qua re functiones φ_1, $\varphi_2 \ldots\ldots \varphi_i$ non desinunt esse aequationis (2.) solutiones a se independentes. Unde etiam si ipsis β_{i+1}, $\beta_{i+2} \ldots\ldots \beta_k$ tribuuntur valores particulares, aequationibus (2.) et (3.) *complete* integrantur aequationes differentiales,

$$dx:dx_1\ldots\ldots:dx_{n-m+i}=X:X_1\ldots\ldots:X_{n-m+i},$$

ad quas per $m-i$ aequationes a Constantibus Arbitrariis vacuas aequationes differentiales propositae,

$$dx:dx_1\ldots\ldots:dx_n=X:X_1\ldots\ldots:X_n,$$

revocantur.

Agamus iam de relationibus inter Constantes Arbitrarias ponendis ut ex aequationum integralium completarum systemate data obtineatur aequatio integralis particularis $u=0$. Qua de re haec observo. Deriventur rursus e proposita sicuti antecedentibus aequationes $m-i$ a Constantibus Arbi-

trariis vacuae. Quae constituunt aequationum integralium systema, cui variabilium differentiatione et aequationum differentialium propositarum substitutione aliae novae aequationes integrales accedere non possunt. Alioquin enim ea ratione e proposita plures quam $m-i$ aequationes obtinerentur integrales a Constantibus Arbitrariis vacuae, quod est contra *suppositionem factam.*

Quoties autem ex aequationibus integralibus variabilium differentiatione et aequationum differentialium propositarum substitutione nulla nova aequatio integralis obtinetur, semper iis totidem substitui possunt aequationes inter functiones $f_1, f_2 \ldots . f_n$.

Introducantur enim variabilium $x, x_1, x_2 \ldots . x_n$ loco quantitates

$$x, f_1, f_2 \ldots . f_n,$$

quo facto resolutione aequationum illarum $m-i$ eruatur,

$$4. \quad f_1 = F_1, \; f_2 = F_2, \; \ldots . \; f_{m-i} = F_{m-i},$$

designantibus F_1 etc. quantitatum,

$$x, \; f_{m-i+1}, \; f_{m-i+2}, \; \ldots . \; f_n,$$

functiones. Differentiando (4.) cum per aequationes differentiales propositas sit,

$$df_1 = df_2 \; \ldots . \; = df_n = 0,$$

prodit,

$$5. \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right) = 0, \; \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) = 0, \; \ldots . \; \left(\frac{\partial F_{m-i}}{\partial x}\right) = 0.$$

Quae neque novae sunt aequationes integrales quia e $m-i$ aequationibus illis novae derivari non possunt, neque ex aequationibus (4.) fluere possunt ut a quantitatibus $f_1, f_2 \ldots . f_{m-i}$ prorsus vacuae. Unde aequationes (5.) identicae sunt, ideoque ipsae $F_1, F_2 \ldots . F_{n-m}$ variabili x omnino carent, sive aequationes $m-i$ e quibus nova derivari non poterat ad alias revocari possunt inter solas $f_1, f_2 \ldots . f_n$, q. d. e.

Sint iam datae aequationes integrales completae,

$$6. \quad f_1 = \alpha, \; f_2 = \alpha_2, \; \ldots . \; f_n = \alpha_n,$$

designantibus α_1 etc. Constantes Arbitrarias, quam formam aequationibus integralibus completis semper conciliare licet. Ex aequatione integrali particulari proposita deducantur quotquot possunt aequationes ab omnibus Constantibus Arbitrariis vacuae eaeque ad alias, quod fieri posse vidimus, inter solas $f_1, f_2 \ldots . f_n$ revocentur; hae aequationes substituendo (6.) suppeditunt $m-i$ relationes inter solas Constantes Arbitrarias α_1, α_2 etc. Quibus accedere debent i relationes inter ipsas α_1 etc. atque Constantes Arbitra-

rias β_1, β_2 .... β_k quibus aequatio proposita afficitur. Etenim cum e m aequationibus de proposita derivatis plures aliae non derivari possint, secundum Propositionem modo traditam eas ad alias revocare licet inter quantitates f_1, f_2 .... f_n, quae per (6.) evadunt m aequationes inter ipsas α_1, α_2 .... α_n quae Constantes β_1, β_2 .... β_k implicabunt. E quibus aequationibus fluere debent $m-i$ quas inter solas α_1 etc. locum habere vidimus. Vice versa si inter Constantes Arbitrarias α_1, α_2 .... α_n illae m relationes habentur, ex iis per (6.) sequuntur m aequationes inter functiones f_1, f_2 .... f_n, quae locum tenent m aequationum a proposita fluentium inter quas ipsa proposita numeratur. Unde aequationes illae m inter Constantes Arbitrarias α_1 etc. et necessariae et sufficientes sunt ad propositam aequationem integralem particularem e datis completis deducendam.

Si pro Constantibus Arbitrariis aequationes integrales completas afficientibus sumuntur variabilium valores initiales, statim habentur $m-i$ relationes inter solos valores initiales vel omnes m relationes inter valores initiales ipsasque quas proposita involvit Constantes Arbitrarias intercedentes, si in $m-i$ aequationibus a Constantibus Arbitrariis vacuis vel in omnibus m aequationibus, quae e proposita deducuntur, ipsis variabilibus substituuntur valores earum initiales.

Relationes particulares inter Constantes Arbitrarias α_1 etc. antecedentibus quaesitae etiam sic indagari possunt. Integratione completa habeantur x_1, x_2 .... x_n per x et Constantes Arbitrarias expressae. Quae expressiones si in proposita aequatione integrali particulari substituuntur, fieri debet ut certis inter Constantes Arbitrarias positis relationibus variabilis x ex ea aequatione omnino exulet. Quae relationes plerumque facile se offerunt. Quibus si iungitur ipsa aequatio quae abeunte variabili x inter solas Constantes Arbitrarias fit, habentur relationes particulares inter Constantes Arbitrarias investigandae.

19.

Ponamus eam datam esse aequationem integralem,

$$1. \quad u = \psi(x),$$

qua variabilium functio u a Constantibus Arbitrariis vacua unius variabilium x atque Constantium Arbitrariarum functioni aequatur, dico *in aequatione* (1.), *sive completa sive particularis sit, Constantes Arbitrarias non inesse supervacaneas.* Qua in re suppono non haberi aequationem inte-

gralem, $x = \text{Const.}$, certe eam aequationem non pertinere posse ad aequationum integralium systema ad quod aequatio proposita pertineat. Porro in functione $\psi(x)$ suppono Constantes Arbitrarias ad minimum revocatas esse numerum. Pro variabilium functione u a Constantibus Arbitrariis vacua ipsas quoque variabiles x_1, x_2 etc. sumere licet.

Si dicimus in aequatione integrali Constantes Arbitrarias inesse supervacaneas sive quibus salva generalitate valores tribui possint particulares, id hunc in modum intelligi potest, sicuti ex iis quae §. 16. tradidi facile colligitur. Sit aequatio integralis proposita

$$2. \quad \Pi(x, x_1 \ldots\ldots x_n, \quad a, a_1 \ldots\ldots b, b_1 \ldots\ldots) = 0$$

in qua insunt Constantes Arbitrariae ad minorem numerum non revocandae a, a_1 etc., b, b_1 etc., quarum b, b_1 etc. sint supervacaneae. Tribuendo Constantibus Arbitrariis supervacaneis b, b_1 etc. valores particulares, ex. gr. evanescentes, ipsorum autem a, a_1 etc. loco ponendo α, $\alpha_1 \ldots\ldots$, prodit aequatio huiusmodi,

$$3. \quad X(x, x_1 \ldots\ldots x_n, \alpha, \alpha_1 \ldots\ldots) = 0.$$

Iam si in aequatione proposita Constantes Arbitrariae b, b_1 etc. sunt supervacaneae, fieri debet ut per systema aequationum integralium maxime generale ad quod aequatio (3.) pertinet, ipsisque α, α_1 etc. per a, $a_1 \ldots\ldots$, b, $b_1 \ldots\ldots$ rite determinatis etiam aequationi propositae (2.) satisfiat. Id quod evenire non potest quoties aequatio integralis proposita forma gaudet aequationis (1.). Quippe in qua aequatione si Constantibus Arbitrariis quibusdam valores particulares tribuuntur, ipsa U ut a Constantibus Arbitrariis vacua immutata manet, ipsa $\psi(x)$ autem abeat in functionem $\psi_1(x)$, Constantium Arbitrariarum minorem numerum involventem. Iam cum ex eodem aequationum integralium systemate utraque aequatio obtineri debeat,

$$u = \psi(x), \quad u = \psi_1(x),$$

etiam haberetur

$$\psi(x) = \psi_1(x).$$

Quod fieri non potest quia supponitur neque in functione $\psi(x)$ Constantes Arbitrarias ad minorem numerum revocari posse neque x aequalem fieri Constanti.

Secundum ea quae §. 16. demonstrata sunt, ex aequatione integrali completa Constantes Arbitrarias non involvente supervacaneas tot derivari possunt aequationes integrales quot propositam Constantes Arbitrariae afficiunt, totidemque habentur solutiones a se independentes aequationis diffe-

rentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Hinc ex antecedentibus haec sequitur Propositio:

„Propositis aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$dx:dx_1\dots\dots:dx_n=X:X_1\dots\dots:X_n,$$

si ex aequationum integralium completarum systemate una datur aequatio qua variabilium x_1, x_2 .... x_n aliqua vel earum functio quaecunque a Constantibus Arbitrariis vacua functioni ipsius x atque m Constantium Arbitrariarum aequatur: ex una illa aequatione m aequationes integrales completae derivari possunt nec non m solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0;$$

unde si aequatio proposita involvit n Constantes Arbitrarias, ex ea totum aequationum integralium completarum systema atque aequationis differentialis partialis solutio generalis obtineri potest."

Observo porro ex aequatione integrali,

$$u=\psi x,$$

eundem numerum derivari aequationum integralium, sive completa sit sive ex eiusmodi aequatione integrali completa nascatur, Constantibus Arbitrariis quos functio $\psi(x)$ involvit valores tribuendo particulares. Sit enim $\psi(x)$ ipsius x functio cui aequatur u per aequationum integralium completarum systema ideoque $u=\psi(x)$ aequatio integralis completa, sint porro aequationes omnes inter se diversae e praecedente iteratis differentiationibus aequationumque differentialium propositarum substitutionibus derivatae,

$$4.\quad u=\psi(x),\quad u'=\frac{d\psi(x)}{dx}\dots\dots u^{(m-1)}=\frac{d^{(m-1)}\psi(x)}{dx^{m-1}},$$

ubi ipsae u, u' etc. sunt variabilium $x, x_1 \dots\dots x_n$ functiones a Constantibus Arbitrariis vacuae. Nulla extare potest inter ipsam x functionesque $u, u' \dots\dots u^{(m-1)}$ aequatio identica; alioquin enim sive aequationes (4.) non a se independentes essent, sive aequatio sequeretur qua x valorem constantem induit, quod utrumque suppositionibus factis oppugnat. Constantibus Arbitrariis functionem $\psi(x)$ afficientibus valores tribuendo particulares vel relationes particulares inter eas ponendo, abeat $\psi(x)$ in $\chi(x)$, prodit aequatio integralis particularis,

$$u=\chi(x),$$

ex eaque derivantur sequentes,

5. $u = \chi(x),\quad u' = \frac{d\chi(x)}{dx} \;\ldots.\; u^{(m-1)} = \frac{d^{m-1}\chi(x)}{dx^{m-1}}$.

Cum inter functiones u, u' .... $u^{(m-1)}$ ipsamque x aequatio identica non habeatur, — quod implicat conditionem earum nullam solius x functionem evadere — non fieri potest ut eo, quod earum aliae datis ipsius x functionibus aequantur, concludatur quibus ipsius x functionibus reliquae aequales sint. Unde etiam aequationes (5.) a se independentes sunt sive ex utraque aequatione $u = \psi(x)$ et $u = \chi(x)$ idem aequationum integralium numerus derivatur, q. d. e.

Aequatio $u = \psi(x)$ completa cum sit Constantibus Arbitrariis supervacaneis non affecta, functio $\psi(x)$ involvere debet m Constantes Arbitrarias, videlicet tot quot ex proposita derivantur aequationes (§. 16.). Data igitur aequatione integrali particulari

$$u = \chi(x),$$

qua functio u a Constantibus Arbitrariis vacua aequatur functioni solius variabilis x (quam variabilem per aequationes integrales non aequari Constanti suppono), secundum propositionem praecedentem cognosci potest Constantium Arbitrariarum numerus quem involvit aequatio integralis completa qua u per x exprimitur. Quippe qui aequatur numero aequationum quae e proposita aequatione integrali particulari derivari possunt.

Aequationum differentialium partialium simultanearum systemata intime cum aequationibus differentialibus vulgaribus connexa.

20.

Tota haec materies quam antecedentibus tractavi non perfecte ababsolvi potest nisi praeter aequationem differentialem partialem,

1. $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \;\ldots.\; + X^n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$

sive hanc,

2. $X = X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2} \;\ldots.\; + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$

simul etiam considerentur systemata quaedam aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis et ipsa cum aequationibus differentialibus

vulgaribus,

$$3.\quad dx : dx_1 \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \ldots\ldots : X_n,$$

arctissime connexa. Quae olim proposui in *Diario Crell. T. II. p. 321.*

Sint rursus $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ solutiones aequationis (1.) a se independentes. Posita inter ipsas $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ una aequatione arbitraria, ea determinatur functio satisfaciens aequationi differentiali partiali (2.). Positis vero inter n functiones $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ aequationibus n arbitrariis, habetur systema aequationum quibus complete integrantur aequationes differentiales (3.). Etenim positis inter n quantitates n aequationibus a se independentibus, quantitates illae Constantibus aequantur neque igitur eo quod aequationes illae sint arbitrariae aliud vel magis arbitrarium effici potest quam ut Constantibus aequentur arbitrariis. Aequando autem $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ Constantibus Arbitrariis nanciscimur aequationum (3.) integrationem completam. Iam inter functiones $f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$ ponendo aequationum arbitrariarum numerum aliquem intermedium m inter 1 et n collocatum investigemus quodnam integretur aequationum differentialium systema.

Sit x_k una quaecunque $n-i$ variabilium,

$$x_{i+1},\quad x_{i+2}\quad \ldots\ldots\quad x_n,$$

omniumque praeter x_k loco introducamus ipsas,

$$f_1,\quad f_2\quad \ldots\ldots\quad f_{n-i-1},$$

ut variabiles independentes. Quod ubi fit secundum §. 4. abit (1.) in hanc aequationem,

$$4.\quad 0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \ldots\ldots + X_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + X_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Differentialia functionis f ipsarum $f_1, f_2 \ldots\ldots f_{n-i-1}$ respectu sumta in aequatione (4.) non obveniunt, qua de re eadem aequatio locum habet si in functione f atque Coefficientibus

$$X,\quad X_1,\quad \ldots\ldots\quad X_i,\quad X_k,\quad \ldots\ldots$$

per novum systema variabilium independentium expressis, pro ipsis $f_1, f_2 \ldots$ $\ldots f_{n-i-1}$ ponimus Constantes Arbitrarias,

$$5.\quad f_1 = \alpha_1,\quad f_2 = \alpha_2,\quad \ldots\ldots\quad f_{n-i-1} = \alpha_{n-i-1}.$$

Sunt aequationis (4.) solutiones,

$$f_{n-i},\quad f_{n-i+1}\quad \ldots\ldots\quad f_n,$$

cum ipsas $f_1, f_2 \ldots\ldots f_{n-i-1}$ Constantium vice fungentes inter solutiones non referamus. Quarum solutionum unam aliquam f_{n-i} et ipsam Constanti Arbitrariae α_{n-i} aequalem statuamus. Ipsâ f_{n-i} aequationum (4.) ope per x,

$x_1 \dots x_i$, x_k exhibitâ, erit aequatio,

$$6.\quad f_{n-i} = \alpha_{n-i},$$

inter quantitates $x, x_1 \dots x_i, x_k$, qua igitur aequatione determinare licet x_k ut ipsarum $x, x_1 \dots x_i$ functionem. Cuius functionis differentialia partialia habentur per aequationes,

$$\left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_k}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_k}{\partial x_1} = 0 \text{ etc.}$$

unde ex aequatione

$$0 = X\left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_1}\right) \dots + X_i\left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_i}\right) + X_k\left(\frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_k}\right),$$

sequitur,

$$7.\quad X_k = X\frac{\partial x_k}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_k}{\partial x_1} \dots + X_i\frac{\partial x_k}{\partial x_i}.$$

Huic igitur aequationi satisfit si beneficio $n-i$ aequationum (5.) et (6.) ipsae $X, X_1 \dots X_i, X_k, x_k$ per variabiles $x, x_1 \dots x_i$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-i}$ exhibentur. Si ipsarum $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-i}$ loco restituuntur functiones $f_1, f_2 \dots f_{n-i}$, redeunt $X, X_1, \dots X_i, X_k$ in ipsas variabilium $x, x_1 \dots x_n$ expressiones propositas. Unde designantibus X, $X_1 \dots X_i$, X_k variabilium $x, x_1 \dots x_n$ expressiones propositas, aequatio (7.) identica fit si ope aequationum (5.) et (6.) exprimitur x_k per

$$x, x_2 \dots x_i, \quad \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-i}$$

ac deinde in differentialibus eius partialibus $\frac{\partial x_k}{\partial x}, \frac{\partial x_k}{\partial x_1} \dots \frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ restituuntur pro ipsis $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ functiones secundum easdem formulas (5.) et (6.) iis aequivalentes, $f_1, f_2 \dots f_{n-i}$.

Pro functionibus $f_1, f_2 \dots f_{n-i}$ in antecedentibus sumi possunt $n-i$ solutiones quaecunque aequationis (1.) sive $n-i$ quaecunque ipsarum $f_1, f_2 \dots f_n$ functiones a se independentes. Unde aequationum (5.) loco alias quascunque ponere licet aequationes a se independentes inter n quantitates $f_1, f_2 \dots f_n$,

$$8.\quad \Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0 \quad \dots \quad \Pi_{n-i} = 0.$$

Qua in re censere possumus Constantes Arbitrarias α_1 etc. ipsarum $f_1, f_2 \dots f_n$ involvi functionibus arbitrariis Π_1 etc.

In formula antecedentibus inventa (7.) designabat x_k quamcunque e quantitatibus $x_{i+1}, x_{i+2} \dots x_n$ aequationum (5.) ope per ipsas $x, x_1 \dots x_i$ expressam. Hinc si ipsius x_k loco successive ponuntur variabiles x_{i+1}, $x_{i+2} \dots x_n$, sequentem eruimus Propositionem:

I. „Propositis inter variabiles independentes $x, x_1 \dots\dots x_i$ atque dependentes $x_{i+1}, x_{i+2} \dots\dots x_n$ aequationibus differentialibus partialibus simultaneis

$$9. \quad \begin{cases} X\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_1} \dots\dots + X_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} = X_{i+1} \\ X\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_1} \dots\dots + X_i\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_i} = X_{i+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X\frac{\partial x_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1} \dots\dots + X_i\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = X_n, \end{cases}$$

functiones $x_{i+1}, x_{i+2} \dots\dots x_n$ dabuntur $n-1$ aequationibus quibuscunque a se independentibus inter solutiones aequationis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots\dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}."$$

Eandem Propositionem sic quoque exhibere licet:

II. „Proposito systemate aequationum differentialium partialium (9.), complete integrentur aequationes differentiales vulgares,

$$dx : dx_1 \dots\dots : dx_n = X : X_1 \dots\dots : X_n$$

atque inter Constantes Arbitrarias, quae aequationes integrales completas afficiunt, positis $n-i$ aequationibus arbitrariis, ex his $n-i$ aequationibus atque n aequationibus integralibus omnes n eliminentur Constantes Arbitrariae, prodeunt $n-i$ aequationes quibus functiones propositae $x_{i+1}, x_{i+2} \dots\dots x_n$ determinantur."

Scilicet aequationes quae integratione aequationum differentialium vulgarium completa obtinentur, semper in formam redigi possunt aequationum,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2 \quad \dots\dots \quad f_n = \alpha_n;$$

quarum ope si e $n-i$ aequationibus arbitrariis inter Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots \alpha_n$ hae omnes eliminantur, obtinentur $n-i$ aequationes arbitrariae inter ipsas $f_1, f_2 \dots\dots f_n$. Unde Propositio II. in antecedentem I. redit.

Aequationes quibus secundum Prop. II. functiones quaesitae x_{i+1}, x_{i+2} etc. determinantur, videri possint nullis affici Constantibus Arbitrariis, quia omnes ex aequationibus inter eas positis arbitrariis et aequationibus integralibus eliminandae sunt. Sed aequationes arbitrariae ipsae affici possunt Constantibus Arbitrariis compluribus vel etiam innumeris unde aequationes investigandas ideoque etiam ipsarum x_{i+1}, x_{i+2} etc. expressiones quaesitas vel numerus infinitus afficere potest Constantium Arbitrariarum.

21.

Aequationum differentialium partialium simultanearum (9.) §. pr. solutio alia quoque ratione invenitur sequente. Propositis aequationibus differentialibus vulgaribus,

$$1.\quad dx : dx_1 \; \ldots\ldots : dx_n = X : X_1 \; \ldots\ldots : X_n,$$

earum sumantur $n-i$ aequationes integrales quaelibet e quibus differentiatione variabilium aequationumque (1.) substitutione aequationes novae non obtineantur. Cujusmodi aequationes patet esse ipsas (8.) §. pr. Resolutis $n-i$ aequationibus exhibeantur

$$x_{i+1},\; x_{i+2} \;\ldots\ldots\; x_n \quad \text{per} \quad x,\; x_1 \;\ldots\ldots\; x_i;$$

quibus expressionibus differentiatis, in formulis provenientibus,

$$2.\quad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial x}\,dx + \frac{\partial x_k}{\partial x_1}\,dx_1 \;\ldots\ldots + \frac{\partial x_k}{\partial x_i}\,dx_i,$$

ipsae (1.) substituantur, prodeunt aequationes,

$$3.\quad X_k = \frac{\partial x_k}{\partial x}\,X + \frac{\partial x_k}{\partial x_1}\,X_1 \;\ldots\ldots + \frac{\partial x_k}{\partial x_i}\,X_i.$$

Quae secundum suppositionem factam non sunt novae aequationes sed contineri debent $n-i$ aequationibus integralibus quibus functiones x_k determinabantur. Unde haec sequitur Propositio:

I. „Propositis aequationibus (3.) vel (9.) §. pr. satisfit per aequationes ipsarum (1.) integrales $n-i$ quaslibet e quibus differentiatione aequationumque (1.) substitutione aequationes novae non prodeunt."

E qua propositione facile sequitur Prop. I. §. pr.

Demonstremus iam Propositionem inversam:

II. „Aequationes $n-i$ ipsis (3.) satisfacientes sunt aequationes ipsarum (1.) integrales e quibus differentiando ipsasque (1.) substituendo novae non prodeunt aequationes."

Aequationes enim propositas quascunque dicimus ipsarum (1.) esse aequationes integrales si ad systema n aequationum finitarum pertinere possunt quarum differentiatione aequationes (1.) obtinentur. Iam aequationum $n-i$ finitarum ope ipsis (3.) satisfacientium exprimantur X, $X_1 \ldots\ldots X_i$ per variabiles x, $x_1 \ldots\ldots x_i$, reliquis variabilibus eliminatis, atque integrentur aequationes differentiales vulgares,

$$4.\quad dx : dx_1 \;\ldots\ldots : dx_i = X : X_1 \;\ldots\ldots : X_i.$$

E quibus aequationibus sequitur per (2.) et (3.)

$$dx : dx_1 \;\ldots\ldots : dx_i : dx_k = X : X_1 \;\ldots\ldots : X_i : X_k.$$

Unde substituendo ipsius x_i loco, x_{i+1}, x_{i+2} .... x_n, videmus ex $n-i$ aequationibus propositis atque i aequationibus ipsarum (4.) integralibus erui aequationes differentiales (1.), ideoque aequationes $n-i$ propositas ad ipsarum (1.) pertinere aequationes integrales. Quibus aequationibus si x_{i+1}, x_{i+2} .... x_n per x, x_1 ... x_n exprimuntur atque in expressionibus illis differentiatis (2.) aequationes (1.) substituuntur, proveniunt aequationes (3.) quibus per ipsas $n-i$ aequationes propositas satisfit. Unde e $n-i$ aequationibus propositis differentiatione aequationumque (1.) substitutione novae non prodeunt aequationes, ideoque probata est Propositio II.

Docet Propositio II. aequationum (9.) §. pr. solutionem quam Propositio I. suppeditat esse generalem seu amplecti modos omnes quibus illae solvi possint aequationes. Monitu tamen opus est eas eligendas esse $n-i$ aequationes integrales quae ipsas x_{i+1}, x_{i+2} .... x_n omnino involvant earumque per reliquas variabiles suggerant determinationem. Alioquin enim in aequationibus differentialibus partialibus formandis variabilium aliae atque antecedentibus pro dependentibus et independentibus sumendae sunt.

Ponamus $n-i$ aequationes differentiales partiales (8.) sive (9.) §. pr solutas esse $n-i$ aequationibus finitis implicantibus $n-i$ Constantes Arbitrarias quae ex iis omnes simul nequeant eliminari, eaedem suppeditabunt $n-i$ solutiones aequationis differentialis partialis,

$$5.\quad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Sint enim illae Constantes Arbitrariae β_1, β_2 .... β_{n-i} earumque ex $n-i$ aequationibus finitis petantur valores per variabiles x, x_1 .... x_n exhibiti,

$$6.\quad \beta_1 = F_1,\ \ \beta_2 = F_2,\ \ \dots\ \ \beta_{n-i} = F_{n-i}.$$

His aequationibus differentiatis et substitutis aequationibus (1.), pro singulis F_1, F_2, ... F_{n-i} eruimus aequationes huiusmodi

$$7.\quad 0 = X\frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Quae secundum Propositionem II. novae esse non possunt aequationes, neque iis per ipsas (6.) satisfieri potest, quippe Constantes Arbitrarias β_1, β_2 .... β_n non involvunt. Unde aequationes antecedentes (7.) identicae esse debent ideoque erunt F_1, F_2 .... F_n aequationis (5.) solutiones, q. d. e.

Idem magis directe sic patet. Sit

$$8.\quad F = \beta$$

una quaelibet ex aequationum (6.) numero; quae identica evadere debet

variabilium x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_n substituendo valores per x, x_1 .... x_i exhibitos ipsarum aequationum (6.) resolutione provenientes. Differentietur aequatio (8.) variabilium independentium x, x_1, ... x_i respectu, obtinemus $i+1$ aequationes sequentes:

$$9. \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+1}}.\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+2}}.\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x} \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+1}}.\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+2}}.\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_1} \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+1}}.\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_{i+2}}.\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_i} \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial x_i} \end{cases}$$

Quae aequationes respective per

$$X, \; X_1, \; \ldots\ldots \; X_i$$

multiplicatae addantur, obtinemus si aequationes (6.) ipsis satisfaciunt aequationibus (9.) §. pr.,

$$0 = X\frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots\cdots + X_i\frac{\partial F}{\partial x_i} + X_{i+1}\frac{\partial F}{\partial x_{i+1}} \cdots\cdots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Cui aequationi ut satisfiat nihil facere possunt aequationes propositae (6.) cum illa a Constantibus Arbitrariis β_1, β_2 .... β_n vacua sit. Unde aequatio praecedens identica esse debet sive singulae functiones F erunt aequationis (5.) solutiones.

In aequationibus antecedentibus (6.) cum sint F_1, F_2, ... F_{n-i} aequationis (5.) solutiones atque β_1, β_2, ... β_{n-i} Constantes Arbitrariae, erunt aequationes (6.) ipsarum (1.) aequationes integrales completae. Qua de re ex antecedentibus hoc fluit Corollarium:

III. „Proponantur aequationes finitae $n-i$ ipsis (9.) §. pr. satisfacientes simulque implicantes $n-i$ Constantes Arbitrarias quae ex iis omnes simul eliminari non possunt, eaedem ad aequationum differentialium vulgarium (1.) pertinebunt aequationes integrales completas."

Aequationes ipsarum (1.) integrales aliae ab aliis distingui possunt numero aequationum integralium quae ex una data per iteratas differentiationes et substitutiones aequationum differentialium deriventur. Si ille numerus ipsum n aequat, systema aequationum ex una proposita derivatarum totum constituit aequationum integralium systema, sive ipsis satisfacit aequationibus differentialibus,

$$X\frac{\partial x_1}{\partial x} = X_1, \quad X\frac{\partial x_2}{\partial x} = X_2, \quad \ldots\ldots X_n\frac{\partial x_n}{\partial x} = X_n;$$

si iste numerus ipso n minor est $= n-i$, systema aequationum e proposita fluentium satisfit aequationibus differentialibus partialibus (9.) §. pr.; si nullam aliam e proposita deducere licet aequationem, ea satisfacit aequationi differentiali partiali

$$10.\quad X = X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\,\ldots\ldots + X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Quod docet totam hanc quaestionem mancam et imperfectam esse nisi simul cum aequationibus differentialibus vulgaribus (1.) atque aequatione differentiali partiali (10.) in considerationem veniant n systemata quodammodo intermedia aequationum differentialium partialium (9.) §. pr.

Addam quae facile ex antecedentibus fluit, hanc Propositionem:

IV. „Proponantur inter variabiles x, x_1 .... x_n aequationes $n-i$ quibus solvitur systema aequationum differentialium partialium,

$$11.\quad \begin{cases} X\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} = X_{i+1} \\ X\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_i\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_i} = X_{i+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X\frac{\partial x_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_i\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = X_n; \end{cases}$$

afficiantur illae $n-i$ aequationes finitae totidem Constantibus Arbitrariis quae ex iis omnes nequeant eliminari; inter quas si ponuntur aequationes arbitrariae $n-k$ (ubi $k > i$), eas omnes $n-i$ Constantes Arbitrarias ex $n-i$ aequationibus propositis atque $n-k$ aequationibus arbitrariis eliminando proveniunt aequationes $n-k$ inter variabiles x, x_1 .... x_n, quibus continebitur solutio systematis aequationum differentialium partialium sequentis,

$$12.\quad \begin{cases} X\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_k\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} = X_{k+1} \\ X\frac{\partial x_{k+2}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{k+2}}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_k\frac{\partial x_{k+2}}{\partial x_k} = X_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X\frac{\partial x_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\,\ldots\ldots + X_k\frac{\partial x_n}{\partial x_k} = X_n. \end{cases}$$"

Rursus enim sint β_1, β_2 .... β_{n-i} Constantes Arbitrariae quibus aequationes propositae afficiuntur, resolutione aequationum prodeunt aequationes (6.), unde $n-k$ aequationes arbitrariae, ipsis β_1, β_2 .... β_{n-i} aequationum (6.) ope

eliminatis, abeunt in aequationes arbitrarias inter functiones F_1, F_2 .... F_{n-i}. Unde ista eliminatione proveniunt $n-k$ aequationes inter aequationis (5.) solutiones quae secundum Prop. I. §. pr. aequationibus differentialibus partialibus (12.) satisfaciunt.

22.

Aequationes differentiales partiales (9.) §. 20 facillime in alias mutantur, in quibus variabilium x, x_1 .... x_n quaecunque $n-i$ pro independentibus, reliquae pro dependentibus habentur. Quippe tantum permutatione variabilium opus est, ipsis X, X_1 .... X_n permutationes similes subeuntibus. Solutio enim generalis tradita eiusmodi permutatione non mutatur quippe quae non afficit aequationes differentiales vulgares (1.) §. pr. a quibus ea solutio pendet. Idem probare licet per formulas differentiales quae pro mutatione variabilium independentium in dependentes, dependentium in independentes habentur. Quod quo melius perspiciatur, generaliter quaeramus quaenam evadant aequationes differentiales partiales (9.) §. 20., si ipsarum x, x_1 .... x_n functiones $i+1$,

$$\xi,\ \xi_1,\ \dots\ \xi_i,$$

pro variabilibus independentibus, aliae $n-i$ functiones,

$$\xi_{i+1},\ \xi_{i+2},\ \dots\ \xi_n,$$

pro dependentibus sumuntur.

Sit k unus indicum $i+1$, $i+2$, ... n, atque a unus indicum 0, 1, 2, ... i, fit,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi_k}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_k}{\partial x_{i+1}}\cdot\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_k}{\partial x_{i+2}}\cdot\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_a}\dots+\frac{\partial\xi_k}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_a}=\\
&\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi}\left\{\frac{\partial\xi}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi}{\partial x_{i+1}}\cdot\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi}{\partial x_{i+2}}\cdot\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_a}\dots+\frac{\partial\xi}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_a}\right\}+\\
&\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_1}\left\{\frac{\partial\xi_1}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_{i+1}}\cdot\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_{i+2}}\cdot\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_a}\dots+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_a}\right\}+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_i}\left\{\frac{\partial\xi_i}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_i}{\partial x_{i+1}}\cdot\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_a}+\frac{\partial\xi_i}{\partial x_{i+2}}\cdot\frac{\partial x_{i+2}}{\partial x_a}\dots+\frac{\partial\xi_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_a}\right\}.
\end{aligned}$$

In altera aequationis parte ponitur ξ_k per x, x_1, ... x_n, ipsas vero x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_n per x, x_1, ... x_i expressas dari; in altera ponitur ξ_k per ξ, ξ_1, ... ξ_i, singulas vero ξ, ξ_1, ... ξ_i per x, x_1, ... x_n, denique rursus x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_n per x, x_1, ... x_i expressas esse. Tribuendo in formula praecedente indici a valores omnes 0, 1, 2, ... i, singulas for-

mulas provenientes multiplicemus respective per X, X_1, X_2, ... X_i atque productarum additionem instituamus. Quo facto si advocantur formulae (9.) §. 20. atque ponitur pro singulis indicis m valoribus 0, 1, 2, ... n:

$$1.\quad \Xi_m = X\frac{\partial \xi_m}{\partial x} + X_1\frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial \xi_m}{\partial x_n},$$

obtinetur,

$$2.\quad \Xi_k = \Xi\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi} + \Xi_1\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_1} \ldots\ldots + \Xi_i\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i}.$$

Si in hac formula ipsi k tribuamus valores $i+1$, $i+2$, ... n, omnesque Ξ, Ξ_1 .... Ξ_n per ξ, ξ_i .... ξ_n exprimuntur, prodit systema aequationum differentialium partialium quod simile est formularum (9.) §. 20. atque ex his oritur, ipsas x, x_1 .... x_n cum ξ, ξ_1 .... ξ_n simulque functiones X, X ... ... X_n cum Ξ, Ξ_1 .... Ξ_n commutando. Si ξ, ξ_1 .... ξ_n variabilibus ipsis x, x_1 .... x_n sed alio quocunque ordine sumtis aequantur, sequitur e (1.) quoties sit

$$\xi_\mu = x_\nu,$$

fieri

$$\Xi_\mu = X_\nu.$$

Unde etiam hac ratione patet in formulis (9.) §. 20. quocunque modo permutari posse variabiles x, x_1 .... x_n, si functiones X, X .... X_n permutationes similes subeant.

Cum adhuc valde iaceant quaestiones de *systematis* aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis, eo maiorem attentionem merentur ea quorum indolem atque naturam bene perspicere licet, siculi systematis quod praecedentibus tractavi. Cui ea forma est, ut in quaque eius aequatione unius tantum variabilis dependentis differentialia partialia inveniantur atque in diversis aequationibus differentialia partialia diversarum variabilium dependentium eiusdem respectu variabilis independentis sumta eodem Coefficiente afficiuntur, variantibus terminis a differentialibus partialibus vacuis. Extat aliud systema aequationum differentialium partialium primi ordinis linearium propositi quasi reciprocum, in quo quamque aequationem ingrediantur differentialia partialia diversarum variabilium dependentium eiusdem respectu variabilis independentis sumta, in diversis autem aequationibus differentialia partialia eiusdem variabilis dependentis diversarum respectu variabilium sumta eodem Coefficiente afficiuntur. Quod et ipsum ad aequationes differentiales vulgares reduci potest, sed ea multo difficilior est reductio et ad Calculi Integralis problemata

De Multiplicatoribus, qui aequationibus differentialibus vulgaribus simultaneis applicati expressionem integrabilem producunt.

23.

Putabatur olim multum nos proficere in solvendis aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis revocando eas ad integrationem systematis aequationum differentialium vulgarium. Quae integratio semper per series infinitas perfici potest sed evolutione in series infinitas etiam directe solvi possunt aequationes illae differentiales partiales, aequationibus differentialibus vulgaribus non intervenientibus. Integratio systematis aequationum differentialium vulgarium etiam fieri potest ope *Multiplicatorum* hoc est factores investigando idoneos quibus multiplicatae aequationes differentiales et additae differentiale producant completum. Sed ea methodus nil est nisi reductio aequationum differentialium vulgarium ad aequationem differentialem partialem. De illis Multiplicatoribus sequentia afferans e casu simplicissimo auspicaturus.

Egregium olim fuit *Euleri* inventum, quaecunque proposita inter duas variabiles x et y aequatione differentiali primi ordinis,

$$1.\quad 0 = dy - \Phi(x,y)\,dx,$$

dari Multiplicatorem qui dextram eius partem reddat differentiale completum. Etenim proposita aequatione differentiali (1.) si aequatio integralis Constantem Arbitrariam α involvens huius respectu Constantis resoluta suppeditat aequationem,

$$\alpha = f,$$

unde differentiando prodit,

$$2.\quad 0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

habetur Multiplicator M, per alterutram aequationem,

$$M = \frac{\partial f}{\partial y},\quad M\Phi = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Aequationes enim (1.) et (2.) prorsus inter se convenire debent ita ut altera per factorem multiplicata in alteram abeat; nam cum ex aequatione integrali completa aequatio (1.) sequi debeat, ex eadem sequi non potest aequatio differentialis ab (1.) diversa et a Constante Arbitraria vacua; alioquin enim

eliminando $\frac{dy}{dx}$ haberetur aequatio inter duas solas quantitates x et y, de aequatione inter tres quantitates x, y, a deducta, quod absurdum est. Quam rem *Eulerus* primum exemplis animadverterat; generaliter eam locum habere adhuc fugit summum Virum postquam ad adyta maxime recondita Calculi Integralis penetraverat. Ita ubi aequationem celeberrimam,

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}=0,$$

complete integraverit sibi non visum esse ipse fatetur ad eandem integrationem etiam per Multiplicatorem pervenire posse; *nondum enim de animadvertisse quotiescunque aequationis differentialis integrale completum constaret, ex eo multiplicatorem quo illa integrabilis reddatur concludi posse.**) Scilicet inventa aequatione integrali completa alteram quidem, variabilem per alteram et Constantem Arbitrariam exhibere consueverant Analytici et hoc poscebatur; Constantem Arbitrariam pro incognita habere eiusque expressionem per utramque variabilem ex aequatione integrali elicere erat conceptio nova ab usu recepto remotior et quae non ita sponte se offerebat. Ea tamen aequationis integralis forma qua utriusque variabilis functio quae Constanti Arbitrariae aequalis fiat exhibetur, maxime genuina videtur; quippe qua forma si aequatio integralis proponitur, nullo interveniente eliminationis negotio per solam differentiationem ad datam aequationem differentialem pervenitur. Unde *Eulerus* illo Multiplicatoris invento sive quod primus aequationem integralem sub forma illa genuine exhibuit, de theoria aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles insigniter meruisse censemus.

At de extensione theoriae Multiplicatoris ad systema duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles *Eulero* non constabat. Etenim pro re tantum *probabili* habebat semper fieri posse ut additione harum aequationum per idoneas factores multiplicatarum aequatio per solas Quadraturas integrabilis prodeat. Nam in Instit. Calc. Integr. **) solutionem aequationis,

$$3.\quad L\frac{\partial v}{\partial x}+M\frac{\partial v}{\partial y}+N\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

in qua L, M, N sunt ipsarum x, y, z functiones quaecunque, revocat ad

*) V. Instit. Calc. Integr. T. III. Supplem. pagg. 606. 636.
**) T. III. pag. 434.

investigationem duorum systematum binorum factorum E, F et G, H, qui expressiones

$$E\left(dx-\frac{L\,dz}{N}\right)+F\left(dy-\frac{M\,dz}{N}\right),$$
$$G\left(dx-\frac{L\,dz}{N}\right)+H\left(dy-\frac{M\,dz}{N}\right),$$

integrabiles reddant seu differentialibus dt, du aequales; quippe quibus inventis docet quantitatem v aequari functioni cuicunque duarum variabilium t et u,

$$v=\Gamma:(t \text{ et } u).$$

Illorum autem factorum E, F, G, H inventionem semper praestari posse *sibi videbari* ait, non affirmatius loquens quia si rem probatam habuisset ei constitisset de reductione solutionis aequationis (2.) ad integrationem completam aequationum simultanearum,

$$dx-\frac{L\,dz}{N}=0,\quad dy-\frac{M\,dz}{N}=0,$$

de qua tamen reductione desperabat. Systematis plurium aequationum differentialium vulgarium inter plures variabiles consideratio *Eulero* minus familiaris fuisse videtur, quamvis passim in quaestionibus Mechanicis atque Isoperimetricis ad eiusmodi systemata duceretur. Qua de re etiam iis tantum casibus nexum aequationum differentialium partialium primi ordinis cum aequationibus differentialibus vulgaribus perspexit quibus aequationes differentiales vulgares primi ordinis inter duas variabiles considerare sufficiebat.

Est illustrissimi *Lagrange* meritum quod proposito systemate aequationum differentialium vulgarium,

$$4.\quad dx_1-\frac{X_1}{X}\,dx=0,\quad dx_2-\frac{X_2}{X}\,dx=0,\quad \ldots.\quad dx_n-\frac{X_n}{X}\,dx=0,$$

aequationes integrales completas primus exhibuerit sub forma aequationum,

$$5.\quad f_1=\alpha_1,\quad f_2=\alpha_2,\quad \ldots.\quad f_n=\alpha_n,$$

quibus assignantur variabilium x, x_1 etc. functiones a se independentes f_1, f_2 .... quae Constantibus Arbitrariis aequandae sunt. Haec forma sicuti in casu simplicissimo unius aequationis ab *Eulero* tractato, praeclara gaudet proprietate quod sola differentiatione nullo interveniente eliminationis negotio Constantes Arbitrariae abeant. Unde fieri debet ut singulae aequationes sola differentiatione e (3.) provenientes,

$$df_1=0,\quad df_2=0,\quad \ldots.\quad df_n=0,$$

identice obtineantur ex aequationibus propositis (4.) per factores idoneos

multiplicatis et additis. Generaliter enim asserere licet si ex aequationibus integralibus completis quaecunque deducta sit aequatio,

$$6. \quad A\,dx + A_1 dx_1 \; \dots\dots + A_n dx_n = 0,$$

in qua A, A etc. sunt ipsarum x, x_1 etc. functiones a Constantibus Arbitrariis omnino vacuae, eam necessario prodire ex ipsis aequationibus differentialibus propositis (4.) per factores idoneos multiplicatis et additis. Nam cum supponatur ex aequationibus integralibus completis sequi et aequationes differentiales propositas (5.) et aequationem (6.), ex iisdem provenire debet aequatio, quae obtinetur substituendo aequationes (4.) in aequatione (6.),

$$7. \quad AX + A_1 X_1 \; \dots\dots + A_n X_n = 0;$$

quae cum sit a Constantibus Arbitrariis vacua, identica esse debet, quia ex aequationibus integralibus completis nulla aequatio a Constantibus Arbitrariis vacua nisi identica deduci potest. Ubi autem identica habetur aequatio (7.), aequationem (5.) sic repraesentare licet,

$$A_1 \left\{dx_1 - \frac{X_1\,dx}{X}\right\} + A_2 \left\{dx_2 - \frac{X_2\,dx}{X}\right\} \dots\dots + A_n \left\{dx_n - \frac{X_n\,dx}{X}\right\} = 0,$$

quae prodit addendo propositas (4.) per A_1, A_2, ... A_n multiplicatas.

Proposito systemate aequationum differentialium vulgarium (4.), interdum ipsa aequationum inspectione succedit eiusmodi Multiplicatores detegere quae aequationem producant e qua per solas Quadraturas obtineatur. Integ 'e aequationum propositarum, $f = \alpha$, ubi f solutio erit aequationis differentialis partialis,

$$8. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots\dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Qua re videri possit hoc respectu artem solvendi aequationes differentiales partiales (8.) per *Lagrangianam* reductionem ad aequationes differentiales vulgares (4.) promotam esse. Sed observo consensum utriusque problematis, solvendi aequationem (8.) et indagandi Multiplicatores M_1, M_2, ... M_n qui expressionem

$$9. \quad M_1 \left\{dx_1 - \frac{X_1\,dx}{X}\right\} + M_2 \left\{dx_2 - \frac{X_2\,dx}{X}\right\} \dots\dots + M_n \left\{dx_n - \frac{X_n\,dx}{X}\right\}$$

integrabilem reddant absque consideratione patere systematis aequationum differentialium vulgarium simultanearum (4.). Unde ante illam *Lagrangianam* reductionem delectam ad solvendam aequationem (8.) istorum Multiplicatorum usus esse potuit atque fuit, ubi e loco *Euleriano* citato intelligitur aliisque fere omnibus exemplis quibus *Eulerus* solutionem assecutus est.

Utrumque autem problema plane idem esse sic patet. Proposita aequatione (8.), sit

$$df = M dx + M_1 dx_1 \ldots\ldots + M_n dx,$$

unde erit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = M_1, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = M_n.$$

Qua de re poscitur functio f pro qua simul habeatur,

$$10. \quad \begin{cases} df = M dx + M_1 dx_1 + M_2 dx_2 \ldots\ldots + M_n dx_n, \\ 0 = MX + M_1 X_1 + M_2 X_2 \ldots\ldots + M_n X_n. \end{cases}$$

Quarum aequationum alteri substitui potest haec,

$$11. \quad df = M_1 \left\{ dx_1 - \frac{X_1 dx}{dx} \right\} + M_2 \left\{ dx_2 - \frac{X_2 dx}{X} \right\} \ldots\ldots + M_n \left\{ dx_n - \frac{X_n dx}{X} \right\},$$

e qua patet inventa functione f simul haberi Multiplicatores M_1, M_2 etc. qui expressionem (9.) differentiale completum seu integrabilem reddant. Vice versa datis illis Multiplicatoribus M_1 etc. qui expressionem (9.) differentiale completum efficiunt df, determinetur quantitas M per formulam,

$$12. \quad M = -\frac{M_1 X_1 + M_2 X_2 \ldots\ldots + M_n X_n}{X}:$$

habetur functio proposita f pro qua aequationes (10.) simul valent ideoque solutio aequationis differentialis partialis propositae (8.).

Ipsius f loco si ponuntur aequationis (8.) solutiones n a se independentes $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$, videmus extare n diversa Multiplicatorum systemata,

$$M_1^{(i)}, \quad M_2^{(i)} \quad \ldots\ldots \quad M_n^{(i)},$$

ita comparata ut expressiones

$$M_1^{(i)} \left\{ dx_1 - \frac{X_1 dx}{X} \right\} + M_2^{(i)} \left\{ dx_2 - \frac{X_2 dx}{X} \right\} \ldots\ldots + M_n^{(i)} \left\{ dx_n - \frac{X_n dx}{X} \right\},$$

differentialia fiant completa earumque integratione prodeant n functiones f_i a se invicem independentes. Quibus inventis functionibus assumtaque earum functione arbitraria,

$$\Pi(f_1, f_2 \ldots\ldots f_n),$$

habetur expressio generalis systematis Multiplicatorum per formulas,

$$13. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} M_1' + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} M_1'' \ldots\ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} M_1^{(n)} \\ M_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} M_2' + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} M_2'' \ldots\ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} M_2^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_n = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} M_n' + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} M_n'' \ldots\ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} M_n^{(n)} \end{cases}$$

Quippe quibus valoribus substitutis prodit,

$$M_1\left\{dx_1 - \frac{X_1 dx}{X}\right\} + M_2\left\{dx_2 - \frac{X_2 dx_2}{X}\right\} \dots + M_n\left\{dx_n - \frac{X_n dx}{X}\right\}$$
$$= \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} df_2 \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} df_n = d\Pi.$$

Quod analogum est iis quae de suo Multiplicatore *Eulerus* tradidit.

24.

Inventis Multiplicatoribus M_1, M_2 etc., e quibus M per formulam (12.) §. pr. obtinetur, restat ut functio f ex aequatione,

$$1.\quad df = M dx + M_1 dx_1 \dots M_n dx_n,$$

in qua dextra pars est differentiale completum, per Quadraturas determinetur. Quod modo maxime generali per hanc regulam fit.

Sit x_i^0 functio quaecunque variabilium x_{i+1}, x_{i+2} .... x_n ita ut x^0 sit functio variabilium x_1, x_2 .... x_n, porro x_1^0 variabilium x_2, x_3 .... x_n etc. qualibet harum functionum quas prorsus ex arbitrio sumere licet,

$$x^0,\quad x_1^0,\quad \dots\quad x_n^0,$$

involvente numerum variabilium unitate minorem quam proxime antecedente, postrema x_n^0 designante Constantem. Ubi simul ponuntur aequationes,

$$2.\quad x = x^0,\quad x_1 = x_1^0.\quad \dots\quad x_{i-1} = x_{i-1}^0,$$

abeunt x, x_1, ... x_{i-1} in ipsarum x_i, x_{i-1}, ... x_n functiones, quas designemus per

$$3.\quad x = x^{(i)},\quad x_1 = x_1^{(i)}.\quad \dots\quad x_{i-1} = x_{i-1}^{(i)}.$$

Substituendo in ipsis M, M_1 etc. valores (3.) formentur ipsarum x_i, x_{i+1}, ... x_n functiones,

$$4.\quad N_i = M\frac{\partial x^{(i)}}{\partial x_i} + M_1\frac{\partial x_1^{(i)}}{\partial x_i} \dots + M_{i-1}\frac{\partial x_{i-1}^{(i)}}{\partial x_i} + M_i,$$

erit functio quaerita,

$$5.\quad f - \text{Constans} = \int_{x^0}^{x} M\partial x + \int_{x_1^0}^{x_1} N_1 \partial x_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} N_2 \partial x_2 \dots + \int_{x_n^0}^{x_n} N_n \partial x_n.$$

Demonstratio huius regulae haec est. Abeat f per (3.) in ipsarum x_i x_{i+1} .... x_n functionem,

$$6.\quad f = f^{(i)},$$

erit e (1.), (4.):

$$7.\quad N_i = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_i};$$

E notatione adhibita patet ponendo,

$$x_i = x_i^0,$$

abire $f^{(i)}$ in $f^{(i+1)}$. Unde erit e (7.),

$$\int_{x_i^0}^{x_i} N_i \partial x_i = f^{(i)} - f^{(i+1)},$$

ideoque,

$$\int_{x^0}^{x} M \partial x + \int_{x_1^0}^{x_1} N_1 \partial x_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} N_2 \partial x_2 \ldots\ldots + \int_{x_n^0}^{x_n} N_n \partial x_n =$$

$$f - f' + f' - f'' + f'' - f''' \ldots\ldots + f^{(n)} - f^{(n+1)} = f - f^{(n+1)},$$

q. d. e. Ipsa $f^{(n+1)}$ est Constans Arbitraria addenda functioni quaesitae f. Quam functionem per $n+1$ Quadraturas determinari videmus, *quarum quamque seorsim exequi licet.* Si quod est simplicissimum pro limitibus inferioribus x^0, x_1^0 etc. Constantes sumuntur, fit e (4.):

$$N_i = M_i,$$

siquidem in M_i ipsis x, x_1 .... x_{i-1} valores constantes.

$$x = x^0, \quad x = x_1^0, \quad \ldots\ldots \quad x_{i-1} = x_{i-1}^0,$$

substituuntur.

Repetam etiam regulam quam eadem de re Celeb. *Lacroix* in maiore Opere de Calculo Integrali tradidit. Faciamus functiones M, M_1 etc. exhiberi ut aggregata productorum quorum singuli factores unicam variabilem involvunt, sive haec sit ipsarum M, M_1 etc. genuina forma sive per evolutionem in series iis concilietur. Statuamus porro si de illa ipsius M expressione omnes reiiciantur termini ipsam x involventes remanere expressionem N_1, si de expressione ipsius M_1 omnes reiiciantur termini ipsas x, x_1 involventes remanere expressionem N_2 et ita porro: erit

$$\int \{M\,dx + M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2 \ldots\ldots + M_n\,dx_n\} =$$
$$\int M \partial x + \int N_1 \partial x_1 + \int N_2 \partial x_2 \ldots\ldots + \int N_n \partial x_n,$$

integralibus ad dextram ita sumtis ut siquidem simili exhibentur forma qua ipsas supposuimus M, M_1 etc. exhiberi, ipsum $\int M \partial x$ nullum terminum ab ipsa x vacuum ac generaliter ipsum $\int N_i \partial x_i$ nullum terminum a variabili x_i vacuum implicet. Demonstrationem haud difficilem praetermitto.

Si ipsas M, M_1 etc. secundum positivas ipsarum $x - x^0$, $x_1 - x_1^0$ etc. potestates evolvere licet, designantibus x^0, x_1^0 etc. Constantes, convenit illa

regula cum nostra, siquidem in hac limites inferiores omnes statuuntur constantes.

Si formula (1.) locum habet, pro binis i et k fit

$$8.\quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i}.$$

Vice versa si aequationes (8.) valeant formulam (1.) haberi sic patet. Ponatur

$$9.\quad P = \int M \partial x,$$

erit,

$$\frac{\partial\left(M_1 - \frac{\partial P}{\partial x_1}\right)}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0,$$

unde expressionem $M_1 - \frac{\partial P}{\partial x_1}$ variabilis x non afficit. Hinc posito,

$$10.\quad P_1 = \int\left(M_1 - \frac{\partial P}{\partial x_1}\right)\partial x_1,$$

integrale P_1 et ipsum a variabili x vacuum fit, unde fit

$$\frac{\partial\left(M_2 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(M_2 - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0;$$

porro habetur e (10.):

$$\frac{\partial\left(M_2 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1} - \frac{\partial\left(M_1 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2} = 0,$$

unde expressionem,

$$M_2 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_2}$$

non afficiunt variabiles x et x_1. Hinc posito,

$$11.\quad P_2 = \int\left(M_2 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_2}\right)\partial x_2,$$

integrale P_2 et ipsum a variabilibus x et x_1 vacuum fit. Hac ratione pergendo, probatur, posito

$$12.\quad \int M \partial x = P,\ \int\left(M_1 - \frac{\partial P}{\partial x_1}\right)\partial x_1 = P_1,\ \int\left(M_2 - \frac{\partial(P+P_1)}{\partial x_1}\right) = P_2,$$
$$\dots\dots \int\left(M_n - \frac{\partial(P+P_1 \dots + P_{n-1})}{\partial x_n}\right) = P_n,$$

functiones P_k a variabilibus $x, x_1 \dots x_{k-1}$ vacuas esse. Invenitur P_k functionem variabilium $x_k, x_{k+1} \dots x_n$ ipsius x_k respectu integrando, qua in re cavere debemus ne integrali adiiciatur quasi Constans Arbitraria expressio ipsas $x, x_1 \dots x_{k-1}$ implicans. Ipsarum autem $x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_n$ ex-

pressionem quamcunque integrali adiicere licet, sive pro limite inferiore integralis cui ipsum P_k aequatur sumere licet variabilium x_{k+1}, x_{k+2}, ... x_n functionem arbitrariam ipsas x, x_1 .... x_k non implicantem.

Erutis P, P_1 .... P_n, fit

$$13.\quad f = P + P_1 + P_2 \ldots\ldots + P_n.$$

Ex hac enim formula sequitur quia functiones P_{k+1}, P_{k+2} etc. ab ipsa x_k vacuae sunt,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial(P + P_1 \ldots\ldots + P_{k-1})}{\partial x_k} + \frac{\partial P_k}{\partial x_k},$$

ideoque cum sit e (12.)

$$14.\quad P_k = \int\left(M_k - \frac{\partial(P + P_1 \ldots\ldots + P_{k-1})}{\partial x_k}\right)\partial x_k,$$

fit,

$$15.\quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = M_k.$$

Unde fit,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_n$$
$$= M\,dx + M_1\,dx_1 \ldots\ldots + M_n\,dx_n,$$

q. d. e. Antecedentibus quoque continetur methodus inveniendi functionem f e dato differentiali eius completo

$$df = M\,dx + M_1\,dx_1 \ldots\ldots + M_n\,dx_n.$$

Quae tamen methodus ita comparata est ut $n+1$ functiones P, P_1 .... P_k per Quadraturas inveniendae aliae *post* alias indagari debeant, vel nisi Quadraturas exequamur per integralia *multiplicia* exhibendae sint.

25.

Quaeramus Multiplicatorum M_1, M_2 etc. expressiones per series infinitas. Quae obtineri possunt e seriebus infinitis quibus §. 7. evolvi solutionem f aequationis,

$$0 = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Expressionem enim ipsius f loco citato inventam differentiando ipsarum x_1, x_2 .... x_n respectu, habentur Multiplicatores,

$$M_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad M_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \ldots\ldots\quad M_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Sed magis directe haec res absolvitur per aequationes differentiales partiales quibus Multiplicatorum systema satisfacere debet. Inchoabo a Multiplicatore *Euleriano*.

Proposita aequatione,

$$0 = dy - \varphi(x, y)\, dx,$$

Multiplicator M qui dextram partem differentiale completum df efficiat, satisfacere debet duabus aequationibus,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\varphi . M,$$

unde fieri debet

$$1. \quad 0 = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial . \varphi M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} + \varphi \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} M.$$

Ut evolutio maxima fiat generalitate, eligatur ex arbitrio functio u secundum cuius potestates positivas integras evolutio procedat, ita ut sit,

$$2. \quad M = A - A' u + A'' \frac{u^2}{2} - A''' \frac{u^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Ad Coëfficientes A, A' etc. alios ex aliis inveniendo statuo,

$$[A^{(i)}] = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x} + \varphi \frac{\partial A^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A^{(i)},$$

porro

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Substituta serie (2.) pro Multiplicatore M posita in aequatione differentiali partiali (1.) qua M definitur, sequitur Coëfficientes singularum potestatum ipsius u nihilo aequando,

$$3. \quad U.A' = [A], \quad U.A'' = [A'], \quad U.A''' = [A''] \quad \text{etc.}$$

Quibus formulis e termino primo A ex arbitrio sumto seriei propositae Coëfficientes A', A'' etc. reliqui omnes determinantur. Si $u = x$ sive $u = x - a$, designante a quantitatem aliquam constantem, fit $U = 1$.

Proposito systemate aequationum differentialium,

$$dx_1 - X_1 dx = 0, \quad dx_2 - X_2 dx = 0, \quad \dots . \quad dx_n - X_n dx = 0,$$

in quo brevitatis causa posui $X = 1$, Multiplicatores M_1, M_2, ... M_n functionis alicuius f fieri debent differentialia partialia ipsarum x_1, x_2 .... x_n respectu sumta; porro posito

$$4. \quad M = -\{X_1 M_1 + X_2 M_2 \dots . X_n M_n\},$$

fieri debet M eiusdem functionis differentiale respectu ipsius x sumtum. Unde designantibus x_i, x_k binas quascunque variabilium x, x_1 .... x_n, fieri debet

$$5. \quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i}.$$

His igitur conditionibus satisfacere debent series infinitae in quas Multiplicatores evolvere proposui, et vice versa illae ubi conditionibus (5.) satisfaciunt sumi possunt pro Multiplicatoribus propositis M_1, M_2 etc.; vidimus enim §. pr. si aequationes (5.) locum habeant, dari integrale expressionis differentialis,

$$M\,dx + M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2 \ldots . + M_n\,dn_n,$$

sive esse hanc expressionem differentiale completum.

Statuamus

$$6.\quad M_i = A_i - A_i'(x-a) + A_i''\frac{(x-a)^2}{1.2} - A_i'''\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

designante a Constantem. Indici i valores $1, 2 \ldots . n$ tribuendo e formula (6.) proveniant n Multiplicatores propositi $M_1, M_2 \ldots . M_n$. Per ipsum $A^{(m)}$ indice inferiore non affectum designemus expressionem,

$$7.\quad A^{(m)} = -\{X_1A_1^{(m)} + X_2A_2^{(m)} \ldots . + X_nA_n^{(m)}\},$$

erit e (4.):

$$8.\quad M = A - A'(x-a) + A''\frac{(x-a)^2}{1.2} - A'''\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Ut satisfaciamus conditionibus,

$$9.\quad \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial M_1}{\partial x},\quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = \frac{\partial M_2}{\partial x},\quad \ldots .\quad \frac{\partial M}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x}$$

sive

$$10.\quad \frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial M_i}{\partial x}$$

substituamus in (10.) formulas (6.) et (8.) atque singularum ipsius $(x-a)$ potestatum Coëfficientes nihilo aequemus. Hac ratione nanciscimur aequationes inter Coëfficientes serierum propositarum sequentes,

$$11.\quad A_i^{(m+2)} = \frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial x} - \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i}.$$

Haec formula docet quomodo inventis,

$$A_1^{(m)},\quad A_2^{(m)},\quad \ldots .\quad A_n^{(m)},$$

atque per eos determinato $A^{(m)}$ ope formulae (7.), determinandi sint Coëfficientes proxime insequentes,

$$A_1^{(m+1)},\quad A_2^{(m+1)},\quad \ldots .\quad A_n^{(m+1)}.$$

Unde omnes evolutionum propositarum Coëfficientes determinantur e primis terminis,

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots .\quad A_n.$$

Quicunque sint illi termini si reliqui Coëfficientes per formulas (11.) ex iis

determinantur, series pro ipsis M_1, M_2, ... M_n provenientes conditionibus (9.) satisfaciunt.

Reliquum est ut series infinitae propositae satisfaciant conditionibus,

$$12.\quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i} = 0,$$

in quibus i et k binos quoscunque indicum $1, 2 \dots n$ designant; nam conditionibus pro quibus alter index est o sive deficit iam satisfactum est. In formula (11.) ponamus k indicis i loco, habemus duas aequationes,

$$A_i^{(m+1)} = \frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial x} - \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_i}, \qquad A_k^{(m+1)} = \frac{\partial A_k^{(m)}}{\partial x} - \frac{\partial A^{(m)}}{\partial x_k}.$$

E quibus sequitur,

$$\frac{\partial A_i^{(m+1)}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k^{(m+1)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(\frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k^{(m)}}{\partial x_i} \right)}{\partial x}.$$

Unde facile patet posito,

$$13.\quad \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = N,$$

fieri

$$14.\quad \frac{\partial A_i^{(m)}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k^{(m)}}{\partial x_i} = \frac{\partial^m N}{\partial x^m}.$$

Huius formulae beneficio e duabus aequationibus,

$$M_i = A_i - A_i'(x-a) + A_i'' \frac{(x-a)^2}{1.2} - A_i''' \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$M_k = A_k - A_k'(x-a) + A_k'' \frac{(x-a)^2}{1.2} - A_k''' \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

haec sequitur,

$$15.\quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i} = N - \frac{\partial N}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} - \text{etc.}$$

Series ad dextram secundum theorema Taylorianum aequatur valori ipsius N pro $x = a$, unde si formulae (10.) locum habent *expressionem,*

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i},$$

variabilis x non afficit.

Docent formulae (15.) conditionibus (12.) satisfieri si pro binis quibuslibet i et k evanescat N sive secundum (13.) primi evolutionum propositarum termini,

$$A_1, \ A_2, \ \dots \ A_n,$$

functionis arbitrariae fiant differentialia partialia ipsarum x_1, x_2 .... x_n re-

spectu sumta. Quae functio ipsam quoque x si placet involvere potest. Quoties igitur termini evolutionum propositarum primi, A_1, A_2, ... A_n, functionis arbitrariae differentialia partialia sunt ipsarum x_1, x_2 .... x_n respectu sumta, atque ex iis Coëfficientes insequentes,

$$A_1^{(m)}, \quad A_2^{(m)}, \quad \dots \quad A_n^{(m)},$$

per formulas (11.) et (7.) alii post alios determinantur, omnibus conditionibus satisfactum erit ut series infinitae (6.) existant Multiplicatores propositi.

Antecedentibus evolutionum propositarum auxilio probatum est, *quoties locum habeant aequationes* (9.),

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial M_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = \frac{\partial M_2}{\partial x}, \quad \dots \quad \frac{\partial M}{\partial x_n} = \frac{\partial M_n}{\partial x},$$

expressiones omnes huiusmodi,

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} = \frac{\partial M_k}{\partial x_i},$$

variabili x vacare. Idem sine ullo serierum infinitarum adiumento patet ex aequatione identica,

$$16. \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial M_k}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x_k}\right)}{\partial x_i} + \frac{\partial\left(\frac{\partial M}{\partial x_i} - \frac{\partial M_i}{\partial x}\right)}{\partial x_k} = 0.$$

Ut conditionibus (15.) satisfiat non necesse est ut quod antecedentibus supposui quantitates N identice evanescant; nam cum expressio quae evanescere debet,

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i},$$

aequatur valori quem N pro $x = a$ induit, sufficit terminos A_1, A_2, ... A_n ita determinare ut quantitates N omnes pro $x = a$ evanescant neque differentialia ipsarum N, variabilis x respectu sumta, pro eodem valore $x = a$ in infinitum abeant. Qua de re designante Ω variabilium x_1, x_2 .... x_n functionem arbitrariam, termini initialis A_i valor maxime generalis forma gaudebit,

$$16. \quad A_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + P_i'(x-a) + P_i''(x-a)^2 + \text{etc.},$$

ubi pro omnibus Coëfficientibus P_i', P_i'' etc. functiones variabilium x_1, x_2 ... ... x_n sumi possunt prorsus arbitrariae. Illis enim ipsorum A_i valoribus positis, ac designantibus i et k binos quoslibet indicum $1, 2 \dots n$, patet fieri pro $x = a$,

$$N = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = 0,$$

quod poscebatur.

24.

Designantibus i et k binos quoslibet indicum 0, 1, 2 .... n, habentur $\frac{n(n+1)}{2}$ expressionis huiusmodi,

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i},$$

quas brevitatis causa ponamus,

$$1. \quad (ik) = \frac{\partial M_i}{\partial x_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_i}.$$

Plurimum interest omnimodis perscrutari varias expressionum (ik) proprietates nexumque qui inter eas intercedit. Qua de re hic quamvis alieno loco agam paucis de numero aequationum finitarum quas inter quantitates (ik) proponere sufficiat ut concludi possit omnes evanescere. Quem numerum inveni ipsum $2n-1$ non egredi.

Habetur aequatio identica,

$$2. \quad \frac{\partial(kl)}{\partial x_i} + \frac{\partial(li)}{\partial x_k} + \frac{\partial(ik)}{\partial x_l} = 0.$$

E qua sequitur Lemma, *quoties simul sit,*

$$(ik) = 0, \quad (il) = 0$$

ipsum (kl) *variabili* x_i *vacare;* quo Lemmate iam §. pr. usus sum. Huius Lemmatis ope facile sequens probatur Propositio:

„Sint

$$\lambda'_i, \; \lambda''_i, \; \ldots\ldots \; \lambda^{(i)}_i$$

variabilium x, x_1 .... x_n functiones quaecunque ea sola conditione circumscriptae ut neque omnes a variabili x_{i+1} vacuae sint nec nisi omnibus α, α' .... $\alpha^{(i)}$ evanescentibus inter eas existat aequatio linearis,

$$\alpha + \alpha'\lambda'_i + \alpha''\lambda''_i \ldots\ldots + \alpha^{(i)}\lambda^{(i)}_i = 0,$$

in qua Coëfficientes α, α' .... $\alpha^{(i)}$ variabili x_{i+1} vacant: si habentur inter quantitates (ik) aequationes $2n-1$,

$$(01) = 0, \quad (12) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (n-1, n) = 0$$

$$(02) = 0, \quad (03) + \lambda'_1(13) = 0, \quad (04) + \lambda'_2(14) + \lambda''_2(24) = 0, \quad \ldots$$

$$\ldots \quad (0n) + \lambda'_{n-2}(1n) + \lambda''_{n-2}(2n) \ldots\ldots + \lambda^{(n-2)}_{n-2}(n-2, n) = 0,$$

cunctae $\frac{n(n+1)}{2}$ quantitates (ik) evanescere debent."

Etenim secundum Lemma propositum sequitur ex aequationibus,

$$(02) = (23) = 0, \quad (12) = (23) = 0,$$

et (03) et (13) variabili x_2 vacare; nullam autem supposui dari aequationem,

$$\alpha + \alpha'\lambda'_1 = 0,$$

in qua α et α' variabili x_2 vacant, nisi et α et α' evanescant, unde ex aequatione

$$(03)+\lambda_1'(13) = 0,$$

sequitur,

$$(03) = (13) = 0.$$

Simili modo ex aequationibus,

$$(03) = (34) = 0, \quad (13) = (34) = 0, \quad (23) = (34) = 0,$$

sequitur secundum Lemma appositum expressiones

$$(04), \quad (14), \quad (24)$$

variabili x_3 vacare. Unde ex una aequatione,

$$(04)+\lambda_2'(14)+\lambda_2''(24) = 0$$

sequuntur tres,

$$(04) = (14) = (24) = 0.$$

Supposuimus enim inter quantitates λ_2' et λ_2'' nullam locum habere aequationem,

$$\alpha+\alpha'\lambda_2'+\alpha''\lambda_2'' = 0,$$

in qua omnes α, α', α'' variabili x_3 vacant nisi α, α', α'' omnes evanescant. Ac prorsus simili via aliae post alias omnes demonstrantur aequationes propositae, $(ik) = 0$. Si placet exemplum, addam Corollarii instar Propositionem, *quoties habeantur* $2n-1$ *aequationes,*

$$\begin{array}{ll} (01) = 0, & \\ (12) = 0, & (02) = 0, \\ (23) = 0, & (03)+x_2(13) = 0, \\ (34) = 0, & (04)+x_3(14)+x_3^2(24) = 0, \\ \cdots & \cdots \\ (n-1,n) = 0, & (0,n)+x_{n-1}(1,n)+x_{n-1}^2(2,n)\ldots+x_{n-1}^{n-2}(n-2,n) = 0, \end{array}$$

cunctas (ik) *identice evanescere.*

De transformatione systematis aequationum differentialium vulgarium inter plures variabiles in unam aequationem differentialem inter duas variabiles.

27.

Sub finem systema aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter plures variabiles propositarum ad unam aequationem differentialem inter duas variabiles revocemus. Eaedem formulae etiam aequationis differentialis partialis linearis transformationem memorabilem suppeditant a qua inchoabo.

Designetur rursus ut supra per symbolum $[F]$ expressio,

$$[F] = X\frac{\partial F}{\partial x}+X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}\ldots+X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}$$

atque ex arbitrio binae eligantur functiones u et v pro quarum altera v non sit identice,

$$[v] = X\frac{\partial v}{\partial x}+X_1\frac{\partial v}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial v}{\partial x_n} = 0.$$

Quibus positis, aliae post alias determinentur expressiones u', u'', u''' etc. etc. per formulas,

$$1.\quad [u]=[v].u',\quad [u']=[v].u'',\quad [u'']=[v].u'''\quad \dots\dots \text{ etc.}$$

In functionibus u', u'' etc. successive formandis pergamus usque dum perveniatur ad functionum $u^{(m)}$ quam per antecedentes

$$u,\quad u',\quad u''\quad \dots\dots\quad u^{(m-1)}$$

ipsamque v exprimere licet, ita ut identice habeatur,

$$2.\quad u^{(m)} = \Omega(v, u, u' \dots\dots u^{(m-1)}),$$

inter quantitates autem,

$$v,\quad u,\quad u'\quad \dots\dots\quad u^{(m-1)},$$

nulla extet aequatio identica.

Sit f quaecunque ipsarum v, u, u', ... $u^{(m-1)}$ functio, erit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)\frac{\partial u'}{\partial x_i}\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(m-1)}}\right)\frac{\partial u^{(m-1)}}{\partial x_i}.$$

Differentialia partialia functionis ipsarum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ uncis inclusi quo distinguantur a differentialibus partialibus ejusdem functionis per variabiles x, x_1 .... x_n exhibitae. Multiplicemus formulam antecedentem per X_i atque indici i tributis valoribus 0, 1, 2, ... n additionem instituamus, prodit secundum notationem usurpatam,

$$[f] = [v]\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+[u]\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+[u']\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)\dots+[u^{(m-1)}]\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(m-1)}}\right).$$

Quae formula propter (1.) in hanc abit,

$$3.\quad X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$= [v]\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+u'\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+u''\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)\dots+u^{(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(m-1)}}\right)\right\},$$

qua in formula est $u^{(m)}$ secundum (2.) data ipsarum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ functio.

Pro ipsa f si sumimus quantitatum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ functionem quae satisfaciat aequationi differentiali partiali,

$$4.\quad 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+u'\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+u''\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)\dots+u^{(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial u^{(m-1)}}\right),$$

eadem functio per variabiles x, x_1 .... x_n exhibita secundum (3.) erit solutio aequationis

$$5.\quad 0 = X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Cum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ sint $m+1$ functiones a se independentes $n+1$ variabilium x, x_1, ... x_n, eveniet tantum pro functionibus u particularibus ut inter ipsam v atque functionum u, u' etc. numerum minorem quam n extet aequatio ab omnibus x, x_1, ... x_n vacua. In genere atque pro innumeris functionibus u erit $m=n$ quo casu erunt quantitates a se independentes v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ eodem numero atque variabiles x, x_1 ... ... x_n ideoque quaelibet ipsarum x, x_1 .... x_n functio f pro ipsarum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ functione haberi potest. Eo igitur casu aequatio (3.) pro quacunque functione f valet. Unde etiam patet innumeris modis aequationem differentialem propositam (5.) transformari in aequationem (4.). Quae si placet pro simpliciore haberi potest, quippe in qua Coëfficientes quibus differentialia partialia multiplicantur praeter unam omnes sunt unitas ipsaeque variabiles independentes.

Si $m<n$, non quaelibet aequationis (5.) solutio erit etiam solutio aequationis (4.); neque enim omnes variabilium x, x_1 .... x_n functiones exprimi poterunt per x, u, u' .... $u^{(m-1)}$. Sed docent antecedentia omnes m aequationis (4.) solutiones etiam esse solutiones aequationis (5.). Illis m solutionibus una cum variabilibus x, x_1 .... x_{n-m} sumtis pro variabilibus independentibus, secundum §. 4. abit (5.) in hanc aequationem

$$0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\dots+X_{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m}}\right),$$

in qua illae m quantitates pro Constantibus habendae sunt. Cuius aequationis solutiones $n-m$ junctae m solutionibus aequationis (4.) suppeditant solutionem aequationis (5.) generalem. Quoties igitur habetur functio u pro qua fit $m<n$ aequatio differentialis partialis proposita ad alias similes revocari potest minorem variabilium numerum implicantes.

Si proponitur systema aequationum differentialium vulgarium,

$$6.\quad dx:dx_1:dx_2\dots dx_n = X:X_1:X_2\dots X_n,$$

fit

$$7.\quad u'=\frac{du}{dv},\quad u''=\frac{d^2u}{dv^2},\quad u'''=\frac{d^3u}{dv^3},\quad \dots \text{ etc.}$$

Unde aequatio identica (2.) in hanc abit aequationem differentialem vulgarem m^{ti} ordinis inter duas variabiles u et v,

$$8.\quad \frac{d^mu}{dv^m}=\Omega\left(v,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dots\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}}\right),$$

quam etiam sic exhibere licet,

$$9.\quad dv:du:du'\dots du^{(m-2)}:du^{(m-1)} = 1:u':u''\dots u^{(m-1)}:\Omega.$$

Aequationum (9.) sint Integralia,

$$10.\quad \varphi_1 = \beta_1,\ \ \varphi_2 = \beta_2,\ \dots\ \varphi_m = \beta_m,$$

designantibus φ_1 etc. ipsarum v, u, u' .... $u^{(m-1)}$ functiones a Constantibus Arbitrariis β_1, β_1 .... β_m vacuas. Quae functiones φ_1, φ_2 .... φ_m erunt solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis (4.) ideoque ex antecedentibus etiam aequationis (5.); unde aequationes (10.) ipsarum quoque aequationum differentialium vulgarium (6.) Integralia sunt. Si $m = n$ quod in genere atque innumeris modis fit, ea ratione habentur cuncta aequationum (6.) Integralia sive earum integratio completa; unde innumeris modis, pro variis variabilium x, x_1 .... x_n functionibus u electis, revocatur systema aequationum differentialium (6.) ad unicam aequationem differentialem n^{ti} ordinis inter duas variabiles u et v. Si vero eiusmodi functio u inventa est, pro qua fit $m < n$ aequatio differentialis inter duas variabiles u et v tantum ad m^{tum} ordinem ascendit, sed eo casu insuper integrandae sunt aequationes differentiales,

$$11.\quad dx : dx_1 \dots dx_{n-m} = X : X_1 \dots : X_{n-m},$$

ubi in dextra parte, aequationum (10.) beneficio, exprimendae sunt X, X_1 etc. per

$$x,\ x_1\ \dots\ x_{n-m},\quad \beta_1,\ \beta_2\ \dots\ \beta_m.$$

Aequationes (11.) cum et ipsae per methodum modo traditam ad unam aequationem differentialem $n-m^{ti}$ ordinis inter duas variabiles revocari possint, videmus si $m < n$ redire aequationes propositas (6.) in duas aequationes differentiales vulgares inter duas variabiles resp. m^{ti} et $n-m^{ti}$ ordinis, alteram post alteram integrandam.

Regiomonti d. 12 Jul. 1841.

05

n

h

it,

ie

x^{p-1}

x^{2p-1}

x^{3p-1}

. . .,

A
de
Ar
sol
ex
qu
qu
tio
dis
sy
len
inv
et
ae

ubl
pe

Ae
tio
vid
dif
ra

N T V B Q C P A S R M

Problema.

Si duae normae MBN, MCN ita moveantur, ut earum vertices B et C immotae maneant, intersectio vero N crurum BN et CN sit semper in data curva RS. Invenire curvam TV, quam altera crurum intersectio M describit.

Solutio

Ducatur BC, bisceturque in A, ex M et N demittantur perpendicula MP, NQ. Dicanturque AQ = x, QN = y, quae inter relat dantur ob curvam RS datam. Sit AP = t et PM = z, quarum invicem relatio est investiganda. Sit BC = 2a et hinc BP = … BQ = a+x. CP = a … a−t et CQ = a−x. Erit ergo △ BPM ∽ △ NQB, ob ang. per Q recto, et MBP = BNQ. erit ergo z : a−t = a+x : y. ergo zy = aa−at+…

Ob eandem rationem triangula CPM, NQC fiunt similia. adeoque rursus $z : a+t = a-x : y$ ideoque $zy = aa - ax + at - tx$. Erit ergo

$aa - at + ax - tx = aa - ax + at - tx$. unde

$t = x$. posito loco x. t erit

$zy = aa - tt$ unde $z = \frac{aa - tt}{y}$.

data ergo aequatione inter y et x. loco x ponitur t et item pro y valor in t datis poni poterit. unde aequatio erit curvae TV. in z, t et datis.

Ex. 1. Sit RS recta ideoque parallela C. erit QN seu y constans ponatur $= b$ erit $bz = aa - tt$. seu $tt = aa - bz$. unde curva TV erit Parabola per puncta C transiens cujus parameter $= b$.

Ex. 11. Sit RS recta utcunque sita ita sit aequatio inter x et y. haec $y = b + \frac{cx}{e}$

$\frac{be + cx}{e} = \frac{be + ct}{e}$ erit ergo

$bez + ctz = aae - ett$. seu. $tt + \frac{ctz}{e} + bz - aa = 0$.

cum ergo c non est $= 0$. erit haec curva hyperbola

A(

des
Ark
sol
ex
quo
que
tio
dis
sy
len
inv
et
ae

ubi
pe

Ae
tio
vi
di
ra

2.

Ueber die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x}$.

(Von dem Herrn Prof. *J. L. Raabe* zu Zürich.)

1.

Im funfzehnten Bande dieses Journals und später in meiner Differenzial- und Integralrechnung mit Functionen einer Variabeln beschäftigte ich mich mit der Summation der ohne Ende fortlaufenden periodischen Reihe

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots + a_px^{p-1}\\ &+ a_1x^p + a_2x^{p+1} + a_3x^{p+2} + a_4x^{p+3} + \ldots + a_px^{2p-1}\\ &+ a_1x^{2p} + a_2x^{2p+1} + a_3x^{2p+2} + a_4x^{2p+3} + \ldots + a_px^{3p-1}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

an der äufsersten Grenze ihrer Convergenz, nämlich, wenn x unendlich nahe der positiven Einheit kommt. Mittels des Ergebnisses dieser Summation habe ich hierauf das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \varphi(\sin a_1x, \sin a_2x, \ldots \cos b_1x, \cos b_2x, \ldots)\, dx,$$

wenn dessen Werth endlich ist, von einem anderen abhängig dargestellt, welches dieselbe untere und eine endliche obere Integrationsgrenze hat.

In den folgenden Blättern werde ich in ähnlicher Weise zuerst die Summation der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$1.\quad \begin{cases} a_1 + \frac{1}{2}a_2x + \frac{1}{3}a_3x^2 + \frac{1}{4}a_4x^3 + \ldots + \frac{1}{p}a_px^{p-1}\\ + \frac{1}{p+1}a_1x^p + \frac{1}{p+2}a_2x^{p+1} + \frac{1}{p+3}a_3x^{p+2} + \frac{1}{p+4}a_4x^{p+3} + \ldots + \frac{1}{2p}a_px^{2p-1}\\ + \frac{1}{2p+1}a_1x^{2p} + \frac{1}{2p+2}a_2x^{2p+1} + \frac{1}{2p+3}a_3x^{2p+2} + \frac{1}{2p+4}a_4x^{2p+3} + \ldots + \frac{1}{3p}a_px^{3p-1}\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

die man *harmonisch-periodische Reihe* nennen kann, für den äufsersten

Grenzwerth ihrer Convergenz, der der Annahme $x=1$ entspricht, vollziehen und mittels des Summen-Ausdruckes das bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} \Phi(\sin ax,\ \cos bx)\frac{dx}{x}$$

einer der oben erwähnten ganz ähnlichen Reduction unterwerfen.

§. I.

Summation der harmonisch-periodischen Reihe (I.).

2.

Die harmonisch-periodische Reihe (I.), die, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots\, a_p$ nicht unendlichgrofs werdende Werthe vorstellen, wie aus dem Verfolge dieser Nr. erhellen wird, für alle Werthe von x, die numerisch kleiner als die Einheit sind, zu den convergenten gehört, werden wir unter der Annahme, x nähere sich ohne Ende der positiven Einheit, zuerst in Rücksicht auf Convergenz untersuchen und hierauf deren Summation ausführen.

Stellt man, wenn x noch als allgemeine Gröfse auftritt, die Summe dieser Reihe (I.) durch y dar, so hat man, wenn die zu demselben Index von a gehörenden Glieder der Reihe in horizontalen Reihen zusammen gebracht werden, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
y = {} & \frac{a_1}{x}\left(x+\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\frac{x^{3p+1}}{3p+1}+\ldots\right)\\
&+\frac{a_2}{x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^{p+2}}{p+2}+\frac{x^{2p+2}}{2p+2}+\frac{x^{3p+2}}{3p+2}+\ldots\right)\\
&+\frac{a_3}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^{p+3}}{p+3}+\frac{x^{2p+3}}{2p+3}+\frac{x^{3p+3}}{3p+3}+\ldots\right)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{a_p}{x}\left(\frac{x^p}{p}+\frac{x^{2p}}{2p}+\frac{x^{3p}}{3p}+\frac{x^{4p}}{4p}+\ldots\right),
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
y = {} & \frac{a_1}{x}\int_0^x (1+z^p+z^{2p}+z^{3p}+\ldots)\,dz\\
&+\frac{a_2}{x}\int_0^x (1+z^p+z^{2p}+z^{3p}+\ldots)\,z\,dz\\
&+\frac{a_3}{x}\int_0^x (1+z^p+z^{2p}+z^{3p}+\ldots)\,z^2\,dz\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{a_p}{x}\int_0^x (1+z^p+z^{2p}+z^{3p}+\ldots)\,z^{p-1}\,dz.
\end{aligned}$$

Man hat aber, für alle Werthe von z, so numerisch kleiner denn die Einheit sind, die Gleichheit:

$$\frac{1}{1-z^p} = 1 + z^p + z^{2p} + z^{3p} + \ldots;$$

daher stellt sich die Summe der harmonisch-periodischen Reihe (I.), oder der Werth von y, durch folgende Gleichung dar:

$$\text{II.} \quad y = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \ldots + a_p z^{p-1}}{1-z^p}\,dz;$$

und da dieses bestimmte Integral, wenn $x^2 < 1$ ist, einen endlichen Werth darbietet (Ir. III. Nr. 106. und 107.*)), so ist auch die harmonisch-periodische Reihe für dieselben Werthe von x eine convergente Reihe, deren Summe die Gleichung (II.) darstellt.

3.

Nunmehr wenden wir uns dem Hauptgegenstande dieser Abhandlung zu, nemlich, den besondern Fall eigens in Betracht zu ziehen, wenn x ohne Ende gegen die positive Einheit convergirt.

In diesem Falle hat das bestimmte Integral zur Rechten in (II.) nur in so fern die Bedeutung einer mathematischen Gröfse, als der Ausdruck (Ir. III. Nr. 105. und 106.):

$$\frac{a_1 + a_2(1-\omega) + a_3(1-\omega)^2 + a_4(1-\omega)^3 + \ldots + a_p(1-\omega)^{p-1}}{1-(1-\omega)^p}.\omega,$$

der beim unendlichen Abnehmen von ω in folgenden

$$\frac{1}{p}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p)$$

übergeht, entweder als unendlichklein werdend, oder als Nullwerth sich herausstellt. Besteht sonach die Bedingungsgleichung

$$1. \quad \frac{1}{p}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p) = 0 \quad \text{oder} \quad = \omega,$$

wo ω eine unendlichklein werdende Gröfse vorstellt, und deutet man den sich nun ergebenden Werth von y durch y_1 an, so hat man folgende Gleichung zur Bestimmung von y_1:

$$2. \quad y_1 = \int_0^1 \frac{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_p z^{p-1}}{1-z^p}\,dz.$$

*) So oft ich im Verlaufe dieser Abhandlung meine Differenzial- und Integralrechnung mit Functionen einer Variabeln citire, werde ich, wenn die Citation die Integralrechnung betrifft, solche durch Ir. andeuten.

Es erübriget uns sonach zur vollständigen Summation der harmonisch-periodischen Reihe (1.), wenn in derselben die allgemeine Gröfse x unendlich nahe der positiven Einheit angenommen wird, nur noch die Ausmittelung dieses bestimmten Integrals; was in der folgenden Nr., bei Zugrundelegung der Bedingungsgleichung (1.) vollzogen werden soll.

4.

Nach Ir. II. Nr. 65. Gleichung (91.) hat man, wenn daselbst x^2 in z und n in $2n+1$ verwandelt wird, die Gleichung:

$$\int\frac{z^n dz}{1-z^p} = -\frac{1}{p}\log(1-z) - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2k(n+1)\pi}{p}\log\left(1-2\sqrt{z}\cos\frac{k\pi}{p}+z\right)$$

$$+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\sin\frac{2k(n+1)\pi}{p}\operatorname{arc tang}\frac{\sqrt{z}-\cos\frac{k\pi}{p}}{\sin\frac{k\pi}{p}} + \text{Const.},$$

wo n und p ganze positive Zahlen vorstellen und $n<p$ ist.

Aus dieser Gleichung findet man, wenn $\alpha<1$ ist, folgende:

$$\int_0^\alpha\frac{z^n dz}{1-z^p} = -\frac{1}{p}\log(1-\alpha) - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\cos\frac{2k(n+1)\pi}{p}\log\left(1-2\sqrt{\alpha}\cos\frac{k\pi}{p}+\alpha\right)$$

$$+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\sin\frac{2k(n+1)\pi}{p}\operatorname{arc tang}\frac{\sqrt{\alpha}\sin\frac{k\pi}{p}}{1-\sqrt{\alpha}\cos\frac{k\pi}{p}}.$$

Setzt man hier für n nach und nach die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p-1,$$

multiplicirt in derselben Ordnung die Ergebnisse mit

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ a_p$$

und nimmt hierauf die Summe der so gewonnenen Gleichungen, so erhält man, mit Zuziehung der Bedingungsgleichung (1.),

$$\int_0^\alpha\frac{a_1+a_2 z+a_3 z^2+\ldots+a_p z^{p-1}}{1-z^p}dz$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1}a_n\cos\frac{2kn\pi}{p}\log\left(1-2\sqrt{\alpha}\cos\frac{k\pi}{p}+\alpha\right)$$

$$+\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1}a_n\operatorname{Sin}\frac{2kn\pi}{p}\operatorname{arc tang}\frac{\sqrt{\alpha}\sin\frac{k\pi}{p}}{1-\sqrt{\alpha}\cos\frac{k\pi}{p}};$$

und da man beim Statthaben der Bedingungsgleichung (1.) auch $\alpha=1$ setzen darf, so hat man

$$y_1 = -\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \left\{\cos\frac{2kn\pi}{p}\log 2\sin\frac{k\pi}{2p} - \sin\frac{2kn\pi}{p}\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos\frac{k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}}\right\},$$

wo (Ir. III. Nr. 130. u. 134.) unter

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos\frac{k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}}$$

der kleinste positive Bogen gemeint ist, dessen trigonometrische Tangente gleich

$$\frac{\cos\frac{k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}}$$

ist. Dieser Ausdruck ist aber mit

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2p}\right)$$

gleichbedeutend, und wenn man $k < p$ hat, so stellt der Ausdruck

$$\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2p}$$

eine positive Gröfse dar; daher hat man:

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\cos\frac{k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}} = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2p}$$

und die obige y_1 darstellende Gleichung geht in folgende über:

$$y_1 = \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2p}\right)\sin\frac{2kn\pi}{p} - \cos\frac{2kn\pi}{p}\log 2\sin\frac{k\pi}{2p}\right\}.$$

Dieses Ergebnifs kann mit Zuziehung der folgenden Gleichungen bedeutend vereinfacht werden. Man hat nämlich:

$\sum_{k=1}^{k=p-1} \sin\frac{2kn\pi}{p} = 0$, für alle ganze Werthe von $n = 1$ bis $n = p$;

$\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos\frac{2kn\pi}{p} = -1$, für alle ganze Werthe von $n = 1$ bis $n = p - 1$:

$\sum_{k=1}^{k=p-1} \cos\frac{2kn\pi}{p} = -1 + p$, für $n = p$;

$\sum_{k=1}^{k=p-1} k\sin\frac{2kn\pi}{p} = -\frac{1}{2}p\operatorname{cotang}\frac{n\pi}{p}$, für alle ganze Werthe von $n = 1$ bis $n = p - 1$;

$\sum_{k=1}^{k=p-1} k\sin\frac{2kn\pi}{p} = 0$, für $n = p$.

Berücksichtigt man diese Gleichungen, so erhält man, mit Zuziehung der Bedingungsgleichung (1.), folgende Bestimmung für y_1:

$$3. \quad y_1 = \frac{\pi}{2p} \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \operatorname{cotang} \frac{n\pi}{p} - \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{n=p} \sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos \frac{2kn\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{2p} - 2a \log 2.$$

Wenn, anstatt aus der anfangs dieser Nr. citirten Gleichung (91.), aus der a. a. O. aufgestellten Gleichung (92.) auf dieselbe Weise, wie bisher geschah, die Bestimmung des Integrals in Gleichung (2.) geschehen wäre, so hätte man auch:

$$y_1 = \frac{\pi}{2p} \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \operatorname{cotang} \frac{n\pi}{p} - \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{n=p} \sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos \frac{2kn\pi}{p} \log \cos \frac{k\pi}{2p} - 2a_p \log 2;$$

daher ergiebt sich beim Statthaben der Bedingungsgleichung (1.) folgende beachtenswerthe Gleichung:

$$4. \quad \sum_{n=1}^{n=p} \sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos \frac{2kn\pi}{p} \log \sin \frac{k\pi}{2p} = \sum_{n=1}^{n=p} \sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos \frac{2kn\pi}{p} \log \cos \frac{k\pi}{2p}.$$

Die hier gefundenen Gleichungen bestehen nur in so fern, als die Bedingungsgleichung (1.) Bestand hat; beim Nichtstatthaben derselben fällt das bestimmte Integral in der Gleichung (2.) aufser den Bereich der mathematischen Gröfsen; daher ermangeln alsdann auch alle aus demselben gezogenen Folgerungen jeglicher Haltbarkeit.

§. II.

Reduction des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx) \frac{dx}{x}$ auf eines, das denselben unteren und einen endlichen oberen Grenzwerth hat.

5.

Hat man das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx) \frac{dx}{x}$$

zur Ausmittelung vorgelegt, wo Φ irgend ein Functionszeichen und a sowohl als b vor der Hand beliebige Constanten vorstellen, so kann von dessen Werth (Ir. III. Nr. 105. und 106.) nur dann die Rede sein, wenn der Ausdruck

$$\Phi(\sin am\omega, \cos bm\omega) \frac{1}{m},$$

wo ω eine unendlichklein werdende Gröfse bedeutet, für alle ganze Zahlenwerthe von $m = 1$ bis $m = \infty$ beständig unendlichklein werdend verbleibt.

Da diese Eigenthümlichkeit des zuletzt aufgestellten Ausdruckes auch für alle endlichen und ganzen Zahlenwerthe von m Statt haben mufs, so fliefst hieraus, zweitens, dafs die Function von x,

$$\varphi(\sin ax.\ \cos bx),$$

für unendlichklein werdende Werthe von x gleichfalls unendlichklein werdend verbleibe.

Ob beim Statthaben dieser Anforderungen das vorgelegte bestimmte Integral eines endlichen Werthes fähig sei, oder nicht, und wie im ersteren Falle die in der Ueberschrift dieses Paragraphen angedeutete Reduction desselben zu bewerkstelligen sei, werden wir, mit Zuziehung des bis jetzt Mitgetheilten, in den folgenden Nrn. aus einander zu setzen uns angelegen sein lassen.

6.

Wird unter ω eine unendlichklein werdende Gröfse gedacht und macht man in der allgemeinen harmonisch-periodischen Reihe (1.) folgende Annahme über die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x:

$$a_1 = \varphi(\sin a\omega,\ \cos b\omega),\quad a_2 = \varphi(\sin 2a\omega,\ \cos 2b\omega),\quad \ldots.$$
$$a_p = \varphi(\sin pa\omega,\ \cos pb\omega),$$

wo nunmehr a und b ganze oder rational-gebrochene Zahlenwerthe vorstellen; nimmt dann p als unendlichgrofs werdende ganze Zahl an, jedoch von der Art, dafs

$$pa\omega = ra.2\pi \quad \text{und} \quad pb\omega = rb.2\pi,$$

wo r zwar willkürlich, jedoch der Bedingung nachkommen mufs, die Producte

$$ra \quad \text{und} \quad rb$$

in ganze Zahlen zu verwandeln: so stellt sich die besagte harmonisch-periodische Reihe, wenn die in derselben vorkommende allgemeine Gröfse x unendlich nahe der positiven Einheit gebracht wird, als das in der vorangehenden Nr. vorgelegte bestimmte Integral heraus, dessen Werth durch y_1 der Gleichung (3.) ausgemittelt werden kann, wenn die Bedingungsgleichung (1.) realisirt wird.

Führen wir sonach in diese Bedingungsgleichung (1.) die oben getroffene Annahme von a_1, a_2, a_3, ... a_p ein, so geht solche zunächst in folgende über:

$$\frac{1}{2r\pi}\int_0^{2r\pi}\varphi(\sin ax,\ \cos bx)\,dx = 0, \quad \text{oder} \quad = \omega,$$

die, wenn x in rx verwandelt wird, folgende Form annimmt:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sin arx, \cos brx)\, dx = 0 \quad \text{oder} \quad = \omega,$$

wo man, was offenbar gestattet ist, zur Rechten vom Gleichheitszeichen, ω statt $2\pi\omega$ gesetzt hat.

Trifft daher auch noch diese Bedingungsgleichung ein, in der die Producte ar und br willkürliche und ganze Zahlenwerthe vorstellen, so hat man:

$$y_1 = \int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{dx}{x},$$

wo man y_1 aus der Gleichung (3.) nach dem getroffenen Uebereinkommen, betreffend die Coefficienten

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_p \quad \text{und die ganze Zahl } p,$$

auszumitteln hat.

Mit der Bestimmung dieser Gröfse y_1 und der Zusammenstellung der End-Ergebnisse werden wir uns in der nächsten Nr. befassen.

7.

Zuvörderst enthält die Gleichung (3.) den Ausdruck

$$\frac{\pi}{2p}\sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \operatorname{cotang}\frac{n\pi}{p}.$$

Stellt man denselben der Kürze wegen durch u vor, so hat man, nach Einführung der Werthe von a_n und p,

$$u = \frac{\omega}{4r}\sum_{n=1}^{n=p-1} \varphi(\sin na\omega, \cos nb\omega) \operatorname{cotang}\frac{n\omega}{2r}.$$

Soll der Ausdruck zur Rechten in ein bestimmtes Integral umsetzbar sein, so mufs der Ausdruck

$$\omega\varphi(\sin na\omega, \cos nb\omega) \operatorname{cotang}\frac{n\omega}{2r}$$

für alle Werthe von $n=1$ bis $n=p-1$ unendlichklein werdend ausfallen (Cr. III. Nr. 105. und 106.). Wegen des Factors

$$\omega \operatorname{cotang}\frac{n\omega}{2r},$$

der, für endliche Werthe von n sowohl (nämlich für $n=1, 2, 3, \ldots$), als für die Werthe von n, die in der Nähe von $p-1$ sind, endlich ausfällt, ist es unerläfslich, dafs der Ausdruck

$$\varphi(\sin na\omega, \cos nb\omega)$$

für die gleichen Werthe von n unendlichklein werdend ausfalle; d. h. die

Function von x,

$$\Phi(\sin a r x, \cos b r x),$$

in welcher ar und br ganze Zahlenwerthe vorstellen, wird nicht nur, wie bereits Nr. 5. festgestellt wurde, für unendlichklein werdende Werthe von x, sondern auch noch alsdann unendlichklein, wenn x in die nächste Nachbarschaft von 2π tritt.

Geschieht auch noch dieser Anforderung ein Genüge, so hat man:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin a r x, \cos b r x) \operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx;$$

und da man unter der so eben festgestellten Bedingung die Gleichung

$$a_p = 0 \quad \text{oder} \quad = \omega$$

hat, so geht die Gleichung (3.), mit Beachtung des Werthes von y_1 der vorangehenden Nr., in folgende über:

$$5. \quad \int_0^\infty \Phi(\sin a x, \cos b x)\frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin a r x, \cos b r x) \operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx - \frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p}\sum_{k=1}^{k=p-1} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p} \log\sin\frac{k\pi}{2p}.$$

Hier angelangt, öffnen sich zwei Wege, die Umformung des in Rede stehenden bestimmten Integrals zu beenden. — Der mit dem doppelten Summenzeichen versehene Ausdruck dieser Gleichung enthält den Factor $\frac{1}{p}$ nur in der ersten Potenz: folglich ist vor der Hand nur eine dieser Summen, entweder die bezüglich auf n, oder die auf k, in ein bestimmtes Integral zu verwandeln möglich; woraus die zwei so eben erwähnten verschiedenen Umformungsarten entspringen.

Führen wir zunächst die Verwandlung der auf n Bezug habenden Summation in ein bestimmtes Integral aus, so haben wir es mit folgendem Ausdrucke zu thun:

$$\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p}.$$

Führt man hier statt a_n und p die oben angedeuteten Werthe ein, so hat man

$$\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p} = \frac{\omega}{r\pi}\sum_{n=1}^{n=p} \Phi(\sin n a\omega, \cos n b\omega)\cos\frac{kn\omega}{r},$$

oder auch

$$\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{n=p} a_n \cos\frac{2kn\pi}{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin a r x, \cos b r x)\cos k x\,dx,$$

wodurch die Gleichung (5.) in folgende übergeht:

$$6. \quad \int_0^\infty \varphi(\sin a x, \cos b x) \frac{dx}{x}$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x) \operatorname{cotang} \frac{x}{2}\, dx$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x) \cos k x\, dx \right\} \log \sin \frac{k\omega}{4r};$$

welche Gleichung die Lösung unseres Problems darstellt.

Behandelt man in gleicher Weise die Gleichung (4.), so ergiebt sich

$$7. \quad \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x) \cos k x\, dx \right\} \log \sin \frac{k\omega}{4r}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x) \cos k x\, dx \right\} \log \cos \frac{k\omega}{4r}.$$

Um die Bedingungen, unter welchen die letzten zwei Gleichungen bestehen, schneller übersehen zu können, fassen wir solche hier kurz zusammen: nämlich

a) Die Buchstaben a und b stellen ganze oder rational-gebrochene Zahlen vor; r stellt eine willkürliche Zahlengröfse vor, jedoch von der Art, dafs die Producte:

$$ar \quad \text{und} \quad br$$

ganze Zahlen bedeuten.

b) Der Ausdruck

$$\varphi(\sin m a\omega, \operatorname{Cos} m b\omega) \frac{1}{m}$$

stellt für alle ganze Zahlenwerthe von $m = 1$ bis $m = \infty$ eine unendlichklein werdende Gröfse vor.

c) Die Function von x:

$$\varphi(\sin a r x, \cos b r x),$$

stellt eine unendlichklein werdende Gröfse vor, wenn x in der Nachbarschaft von Null und von 2π ist.

d) Endlich mufs die Bedingungsgleichung

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sin a r x, \cos b r x)\, dx = 0 \quad \text{oder} \quad = \omega$$

Statt finden.

Anmerkung. Sämmtliche hier gefundenen Ergebnisse sind auch auf das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \varphi(\sin a_1 x, \sin a_2 x, \ldots \cos b_1 x, \cos b_2 x, \ldots) \frac{dx}{x},$$

anwendbar (Jr. III. Nr. 185. und 186.).

8.

Bevor wir zur zweiten Umformungsart der Gleichung (5.), zur Verwandlung der Summe bezüglich k in ein bestimmtes Integral schreiten, erachten wir es passend, erst einige Anwendungen der in den letzten Nrn. gefundenen allgemeinen Ergebnisse mitzutheilen.

Als ersten besondern Fall nehme ich das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \sin x^{2q+1} \frac{dx}{x},$$

wo q eine ganze positive Zahl und auch gleich Null sein kann.

Hier ist

$$\varphi(\sin ax, \cos bx) = \sin x^{2q+1};$$

sonach fällt b aufser Betracht, und da man $a=1$ hat, so kann $r=1$ angenommen werden. Ferner hat man, welche ganze Zahl auch m sein mag, die Grenzgleichung

$$\lim. \frac{1}{m}(\sin m\omega)^{2q+1} = 0:$$

daher findet auch die in b) ausgesprochene Bedingung Statt. Eben so hat man

$$\lim. \sin \omega^{2q+1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim. [\sin(2\pi-\omega)]^{2q+1} = 0,$$

wo die Grenzzeichen *lim.* hier und vorhin auf die unendliche Abnahme von ω bezogen sind; sonach findet auch die Anforderung in c) Statt. Endlich hat man

$$\int_0^{2\pi} \sin x^{2q+1}\,dx = \int_0^\pi \sin x^{2q+1}\,dx + \int_\pi^{2\pi} \sin x^{2q+1}\,dx.$$

Es ist aber

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x^{2q+1}\,dx = -\int_0^\pi \sin x^{2q+1}\,dx;$$

daher hat man

$$\int_0^{2\pi} \sin x^{2q+1}\,dx = 0,$$

wodurch auch die Bedingungsgleichung d) realisirt wird: daher können wir bei der Ausmittelung des hier vorgelegten bestimmten Integrals von der Gleichung (6.) Gebrauch machen.

Mit Zuziehung dieser Gleichung hat man:

$$\int_0^\infty \sin x^{2q+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin x^{2q+1} \operatorname{cotang} \frac{x}{2}\,dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=p-1}\left\{\int_0^{2\pi} \sin x^{2q+1} \cos kx\,dx\right\} \log \sin \frac{k\omega}{4}.$$

Es ist
$$\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx.$$
Wird im zweiten Integrale zur Rechten x in $2\pi-x$ verwandelt, so ergiebt sich, da α eine ganze Zahl ist,
$$\int_{\pi}^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx=-\int_0^{\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx;$$
also giebt die vorangehende Gleichung
$$\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\operatorname{cotang}\frac{x}{2}\,dx=0$$
und man hat zur Bestimmung des vorgelegten Integrals folgende Gleichung:
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x-\cos\alpha x}{x}\,dx=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\omega-1}\left\{\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\cos kx\,dx\right\}\log\sin\frac{k\omega}{4}.$$
Zur weitern Reduction des Ausdruckes zur Rechten berücksichtige man die Gleichheit
$$(\cos x-\cos\alpha x)\cos kx$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\cos(k-1)x+\cos(k+1)x-\cos(k-\alpha)x-\cos(k+\alpha)x\}.$$
Wird nun, wie bis jetzt immer geschah, α als ganze Zahl betrachtet, so erhält man, vermöge dieser Gleichheit, für alle Werthe von k, die von 1 und von α verschieden sind, die Gleichung
$$\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\cos kx\,dx=0.$$
Für $k=1$ hat man die Gleichung
$$\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\cos kx\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}dx=\pi$$
und für $k=\alpha$,
$$\int_0^{2\pi}(\cos x-\cos\alpha x)\cos kx\,dx=-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}dx=-\pi.$$
Vermöge dieser Ergebnisse hat man das Summenzeichen in der vorigen Gleichung, die unser vorletztes Integral darstellt, lediglich auf zwei isolirte Werthe von k, nämlich auf
$$k=1\quad\text{und}\quad k=\alpha$$
auszudehnen, und man hat sonach
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x-\cos\alpha x}{x}\,dx=-\frac{1}{\pi}\left\{\pi\log\sin\frac{\omega}{4}-\pi\log\sin\frac{\alpha\omega}{4}\right\},$$

oder auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos \alpha x}{x} dx = \log \frac{\sin \frac{\alpha \omega}{4}}{\sin \frac{\omega}{4}}.$$

Stellt nun α nicht nur eine ganze, sondern auch eine endliche Zahl vor, so hat man

$$\sin \frac{\alpha \omega}{4} = \frac{\alpha \omega}{4} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{4},$$

und die vorige Gleichung bietet folgendes Endresultat dar:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos \alpha x}{x} dx = \log \alpha,$$

welchem man, da α positiv oder negativ sein darf, folgende Form geben kann:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos \alpha x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \log \alpha^2.$$

Stellt β eine von α verschiedene ganze Zahl vor, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos \beta x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \log \beta^2;$$

subtrahirt man dieses von einander, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

wo α und β beliebige ganze Zahlen sind.

Geht, um diese Gleichung zu verallgemeinern, x in mx über, wo m eine beliebige positive Zahlengröfse bedeutet, so stellen αm und βm beliebige Zahlen vor. Setzt man demnach

$$\alpha m = a \quad \text{und} \quad \beta m = b,$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x - \cos b x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

wo b und a zwar völlig willkürlich sind, jedoch ein commensurabeles Verhältnifs eingehen.

Anmerkung. Diese Gleichung besteht auch, wenngleich a und b ein incommensurabeles Verhältnifs haben; wie man es aus den meisten Schriften über Integralrechnung entnehmen kann (Ir. III. Nr. 158.).

10.

Auch folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \log \frac{1 + 2a \cos x + a^2}{1 + 2a \cos \alpha x + a^2} \cdot \frac{dx}{x},$$

in welchem a eine ganze Zahl vorstellt, wollen wir noch mittelst der allgemeinen Resultate einer Reduction unterziehen und es zu bestimmen suchen.

Auch hier kann man $r = 1$ annehmen. Ferner ist der Ausdruck

$$\frac{1}{m}\log\frac{1+2a\cos m\omega+a^2}{1+2a\cos m a\omega+a^2}$$

für alle Werthe von $m = 1$ bis $m = \infty$ unendlichklein werdend, wodurch der Anforderung in b) entsprochen wird; die Function von x:

$$\log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos ax+a^2}$$

geht für $x = 0$ sowohl, als auch, da a eine ganze Zahl ist, für $x = 2\pi$, in Null über: also geschieht auch der Bedingung in c) ein Genüge.

Um endlich die Realisirung der Bedingungsgleichung in d) darzuthun, müssen wir Einiges voranschicken.

Läfst man in dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\pi \log(1+2a\cos a+a^2)\,dx$$

x in $\pi - x$ übergehen, so ergiebt sich die Gleichheit

$$(\alpha.)\quad \int_0^\pi \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = \int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx.$$

Ferner hat man die Gleichheit

$$\int_0^{a\pi} \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = \sum_{n=1}^{n=a}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx,$$

wo a eine ganze Zahl vorstellt. Wird hier in dem Ausdrucke zur Rechten $n\pi - x$ statt x gesetzt, so hat man auch

$$\int_0^{a\pi} \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = \sum_{n=1}^{n=a}\int_0^\pi \log(1+2a\cos n\pi\cos x+a^2)\,dx.$$

Löset man das Summenzeichen zur Rechten auf und berücksichtiget die Gleichung (α.), so findet man folgende:

$$(\beta.)\quad \int_0^{a\pi}(1+2a\cos x+a^2)\,dx = a\int_0^\pi \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx.$$

Nunmehr ist es leicht, die Bedingungsgleichung in d) zu realisiren. Es ist nämlich:

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos ax+a^2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\log(1+2a\cos x+a^2)\,dx - \int_0^{2\pi}\log(1+2a\cos ax+a^2)\,dx.$$

Wird im zweiten bestimmten Integral zur Rechten $\frac{x}{\alpha}$ statt x gesetzt, so geht diese Gleichheit über in

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \log(1+2a\cos x + a^2) dx - \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\alpha\pi} \log(1+2a\cos x + a^2) dx,$$

was mit Beachtung der vorhin aufgestellten Gleichheit (β.) in

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} \log(1+2a\cos x + a^2) dx - \frac{2\alpha}{\alpha} \int_0^{\pi} \log(1+2a\cos x + a^2) dx$$

übergeht, oder auch in

$$(\gamma.) \quad \int_0^{2\pi} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx = 0,$$

w. z. b. w.

Wir sind also, bei der Ausmittelung des vorgelegten bestimmten Integrals von der allgemeinen Gleichung (6.) auszugehen berechtiget, die, auf den vorliegenden Fall angewendet, in folgende übergeht:

$$\int_0^{\infty} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=p-1} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos kx \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx \right\} \log \sin \frac{k\omega}{4}.$$

Zuerst wollen wir darthun, daſs das erste bestimmte Integral zur Rechten vom Gleichheitszeichen den Nullwerth hat.

Es ist nämlich

$$\int_0^{2\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx$$
$$= \int_0^{\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx.$$

Wird im zweiten dieser Integrale $2\pi - x$ statt x gesetzt, so erhält man, beachtend den Umstand, daſs α eine ganze Zahl vorstellt, die Gleichheit:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx = -\int_0^{\pi} \text{cotang} \frac{x}{2} \log \frac{1+2a\cos x + a^2}{1+2a\cos\alpha x + a^2} dx;$$

folglich erhält man, wie behauptet wurde,

$$(\delta.)\quad \int_0^{2\pi} \operatorname{cotang}\frac{x}{2}\log\frac{1+2a\cos x\ +a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\,dx = 0.$$

Vermöge dieses Ergebnisses hat man, wenn der Kürze wegen

$$f(k) = \int_0^{2\pi} \cos kx \log\frac{1+2a\cos x\ +a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\,dx$$

gesetzt wird, folgende Reductionsgleichung:

$$(A.)\quad \int_0^{\infty} \log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k)\log\sin\frac{k\omega}{4}.$$

Um $f(k)$ zu bestimmen, stellen wir zur Vereinfachung folgende Gleichung fest: $u_{k,\alpha} = \int_0^{2\pi} \cos kx \log(1+2a\cos\alpha x+a^2)\,dx.$

Dies giebt

$$f(k) = u_{k,1} - u_{k,\alpha};$$

und unser nächstes Geschäft wird die Untersuchung der Function $a_{k,\alpha}$ betreffen.

Wird in dem bestimmten Integral, welches $u_{k,\alpha}$ darstellt, x statt αx gesetzt, so hat man auch:

$$u_{k,\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\alpha\pi} \cos\frac{k}{\alpha}x \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx,$$

welche Gleichung auch folgendermaßsen gestellt werden kann:

$$u_{k,\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{n=\alpha}\int_{(n-1)2\pi}^{n.2\pi} \cos\frac{k}{\alpha}x \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx.$$

Geht hier x in $n.2\pi-x$ über, so hat man

$$u_{k,\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{n=\alpha}\int_0^{2\pi} \cos\frac{k}{\alpha}(2n\pi-x) \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx,$$

oder auch

$$u_{k,\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{n=\alpha}\cos\frac{k}{\alpha}(2n\pi-x)\right\}\log(1+2a\cos x+a^2)\,dx.$$

Es ist aber

$$\sum_{n=1}^{n=\alpha}\cos\frac{k}{\alpha}(2n\pi-x) = \frac{\sin\left[2k\pi+\frac{k}{\alpha}(\pi-\alpha)\right]-\sin\frac{k}{\alpha}(\pi-x)}{2\sin\frac{k}{\alpha}\pi}:$$

folglich hat man

$$\sum_{n=1}^{n=\alpha}\cos\frac{k}{\alpha}(2n\pi-x) = 0,$$ wenn k kein ganzes Vielfache von α ist,

und

$$\sum_{n=1}^{n=\alpha}\cos\frac{k}{\alpha}(2n\pi-x) = \alpha\cos rx,$$ wenn $k=r\alpha$ ist, wo r eine ganze Zahl vorstellt.



Man hat also

$$u_{k,\alpha} = \int_0^{2\pi} \cos rx \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = u_{r,1};$$

und wir erlauben uns eine kleine Unterbrechung, um ein so eben gewonnenes, nicht uninteressantes Ergebnifs besonders hervor zu heben.

Wenn k und α zwei beliebige ganze Zahlen vorstellen, so hat man

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \log(1+2a\cos\alpha x+a^2)\,dx = 0,$$

falls α kein Divisor von k ist; im entgegengesetzten Falle aber, wenn $k = r\alpha$ *ist, wo*

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

sein kann, hat man

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \log(1+2a\cos\alpha x+a^2)\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos rx \log(1+2a\cos\alpha x+a^2)\,dx.$$

Wenden wir uns nun wiederum unserem Gegenstande zu, so sind wir mittelst der so eben ausgesprochenen Ergebnisse folgende Gleichung aufzustellen berechtiget:

$$f(k) = u_{k,1} - u_{r,1},$$

oder

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos kx - \cos rx)\log(1+2a\cos x+a^2)\,dx,$$

wo

$$k = r\alpha \quad \text{oder} \quad r = \frac{k}{\alpha}$$

ist und r eine ganze Zahl vorstellt.

Zur weiteren Reduction der letzten Gleichung legen wir folgende zum Grunde, die durch theilweises Integriren gewonnen wird:

$$\int_0^{2\pi} \cos\lambda x \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = \frac{2a}{\lambda}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\lambda x \sin x}{1+2a\cos x+a^2}\,dx,$$

wenn λ eine ganze Zahl vorstellt. Da man aus dieser Gleichung folgende gewinnt:

$$\int_0^{2\pi} \cos\lambda x \log(1+2a\cos x+a^2)\,dx = \frac{a}{\lambda}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\lambda-1)x - \cos(\lambda+1)x}{1+2a\cos x+a^2}\,dx,$$

so hat man (Ir. III. Nr. 172. Gleichungen (*b.*) und (*c.*)):

$$(\varepsilon.)\begin{cases}\int_0^{2\pi}\cos\lambda x\log(1+2a\cos x+a^2)dx=2\pi(-1)^{\lambda-1}.\frac{a^\lambda}{\lambda}, & \text{für } a^2<1,\\ \int_0^{2\pi}\cos\lambda x\log(1+2a\cos x+a^2)dx=2\pi(-1)^{\lambda-1}.\frac{a^{-\lambda}}{\lambda}, & \text{für } a^2>1,\end{cases}$$

welche Gleichheiten für $a^2=1$ ein und dasselbe Resultat darbieten, das auch durch eine directe Bestimmung sehr leicht gewonnen wird.

Diesem zu Folge hat man, wenn $a^2 \leqq 1$ ist, die Gleichheit:

$$(\zeta.)\ \int_0^{2\pi}\cos kx\log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}dx=2\pi\left\{(-1)^{k-1}.\frac{a^k}{k}-(-1)^{r-1}.\frac{a^r}{r}\right\},$$

und wenn $a^2 \geqq 1$ ist, die folgende:

$$(\eta.)\ \int_0^{2\pi}\cos kx\log\frac{1+2a\cos x+a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2}dx=2\pi\left\{(-1)^{k-1}.\frac{a^{-k}}{k}-(-1)^{r-1}.\frac{a^{-r}}{r}\right\}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichheiten schicken wir uns nun an, die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k)\log\sin\frac{k\omega}{4},$$

in welcher p eine unendlichgrofs werdende ganze Zahl vorstellt, einer weitern Reduction zu unterziehen.

Beachtet man die Bedeutung von $f(k)$ und fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wenn $a^2 \leqq 1$ ist, so bietet die Gleichheit (ζ.) Folgendes dar:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k)\log\sin\frac{k\omega}{4}$$

$$=2\pi\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}.\frac{a^k}{k}\log\sin\frac{k\omega}{4}-2\pi\sum_{=1}^{k=\infty}(-1)^{r-1}\frac{a^r}{r}\log\sin\frac{r\alpha\omega}{4},$$

oder auch

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k)\log\sin\frac{k\omega}{4}=2\pi\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}.\frac{a^n}{n}\log\frac{\sin\frac{n\omega}{4}}{\sin\frac{n\alpha\omega}{4}}.$$

Im vorliegenden Falle, wo $a^2 \leqq 1$ ist, nimmt der Factor $\frac{a^n}{n}$ beim unendlichen Zunehmen von n ohne Ende ab: daher kann in der letzten Gleichung die auf n bezügliche Summe von $n=1$ bis zu einem hinlänglich grofsen, jedoch endlichen Werthe ausgedehnt werden. Man hat aber, wenn n eine endliche Zahl vorstellt,

$$\frac{\sin\frac{n\omega}{4}}{\sin\frac{n\alpha\omega}{4}}=\frac{\frac{n\omega}{4}}{\frac{n\alpha\omega}{4}}=\frac{1}{\alpha};$$

folglich geht die letzte Gleichung über in:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k)\log\sin\frac{k\omega}{4}=2\pi\left(\log\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}.$$

Bei der vorliegenden Annahme für a hat man

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} = \log(1+a);$$

daher ist

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} f(k) \log \sin \frac{k\omega}{4} = -2\pi \log \alpha \log(1+a).$$

Wird dieses Ergebnifs in die oben aufgestellte Gleichung ($A.$) gesetzt, so hat man

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos x\ +a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log \alpha^2 \log(1+a), \quad \text{für } a^2 \leqq 1.$$

Auf gleichem Wege, oder als Folgerung aus dieser Gleichung erhält man

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos x\ +a^2}{1+2a\cos\alpha x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log \alpha^2 \log\left(1+\frac{1}{a}\right), \quad \text{für } a^2 \geqq 1.$$

Diese Ergebnisse, die nur für ganze Zahlenwerthe von α bestehen, zu verallgemeinern, lassen wir abermals den Fall $a^2 \leqq 1$ auftreten. Bei dieser Annahme für a hat man, wenn β irgend eine ganze Zahl vorstellt, die Gleichung

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos x\ +a^2}{1+2a\cos\beta x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log \beta^2 \log(1+a).$$

Diese Gleichung, mit der vorigen durch Subtraction verbunden, giebt

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos\alpha x+a^2}{1+2a\cos\beta x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log(1+a) \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

Setzt man hier mx statt x, wo m eine beliebige, positive Zahlengröfse vorstellt, so stellen die Producte αm und βm, die wir der Einfachheit wegen durch α und β vorstellen wollen, gleichfalls beliebige Zahlengröfsen vor und man erhält

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos\alpha x+a^2}{1+2a\cos\beta x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log(1+a) \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2, \quad \text{für } a^2 \leqq 1,$$

und auf gleiche Weise

$$\int_0^\infty \log \frac{1+2a\cos\alpha x+a^2}{1+2a\cos\beta x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \log\left(1+\frac{1}{a}\right) \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2, \quad \text{für } a^2 \geqq 1.$$

In diesen Endgleichungen stellen α und β beliebige reelle Zahlenwerthe vor, die jedoch, wie aus der Deduction derselben erhellet, ein commensurables Verhältnifs eingehen müssen. Bedenkt man aber, dafs jede incommensurable Zahl mit jeder verlangten Schärfe durch eine gebrochene commensurable Zahl ausgedrückt, wenigstens so gedacht werden kann, so gelangen wir zu der Folgerung: *Die beiden so eben gefundenen Gleichungen bestehen für alle reellen Werthe von α und β.* (Die Fortsetzung folgt.)

Zürich im Januar 1840.

3.

Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques.

(Lu à l'académie royale des sciences de Copenhague le 15 Febr. 1839.)

(Par Mr. *Chr. Jürgensen* de Copenhague.)

Soit X une fonction quelconque algébrique de x, c'est-à-dire une fonction rationnelle de x et d'une quelconque des racines $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ de l'équation

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles et entières de x; on sait qu'on peut toujours donner à cette fonction l'une de deux formes

$$X = \frac{fx}{\varphi_k x}, \qquad X = fx.\varphi_k x,$$

fx étant une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de x seul, et $\varphi_k x$ étant une fonction rationnelle et entière de x et de la racine y_k qui, lui même, est à son tour une fonction de x. (Voir p. ex. vol. 19 p. 114 de ce journal.) Cela posé, il se présente dans la recherche de l'intégrale $\int X \partial x$ les deux questions principales:

1) Trouver les cas, dans lesquels on peut exprimer $\int X \partial x$ sous forme finie, c'est-à-dire par un nombre fini d'opérations algébriques et logarithmiques;

2) Trouver des relations entre les intégrales $\int fx_1 \varphi_k x_1 \partial x_1$, $\int fx_2 \varphi_h x_2 \partial x_2$ etc. qui répondent aux variables x_1, x_2 etc., dépendantes entre elles, et aux différentes racines y_k, y_h etc.

Les moyens, qu'on a employées jusqu'ici pour arriver à la solution de ces deux problèmes, sont fondés en grande partie sur la décomposition des fractions rationnelles; c'est pourquoi nous allons d'abord établir les propositions suivantes.

Soient fx et φx deux fonctions entières de x, et

$$\varphi x = K(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_\mu).$$

Désignant $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ par $\varphi' x$ on a $\varphi' a_i =$ la valeur de $\frac{\varphi x}{x-a_i}$ lorsque $x = a_i$, donc, par une formule connue (vol. 19 pag. 84 de ce journ.)

$$\frac{fx}{\varphi x} = \overset{i=\mu}{\underset{i=1}{S}} \frac{fa_i}{(x-a_i)\varphi' a_i} + H\left\{\frac{1}{t-x}\cdot\frac{ft}{\varphi t}\right\},$$

$H\{\psi t\}$ étant le coefficient de $\frac{1}{t}$ dans le développement d'une fonction quelconque ψt suivant les puissances déscendantes de t.

Si l'équation $\varPhi x = 0$ a des racines égales, de sorte que

$$\varPhi x = K(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \dots (x-a_\mu)^{m_\mu},$$

on a $\frac{\varphi^{(m_i)} a_i}{1.2.3 \dots m_i}$ = la valeur de $\frac{\varphi x}{(x-a_i)^{m_i}}$ lorsque $x = a_i$, donc en substituant dans la formule qui a lieu pour ce cas (vol. 19 pag. 85), il vient

$$\frac{fx}{\varphi x} = \overset{i=\mu}{\underset{i=1}{S}} m_i \frac{\partial^{m_i-1}\left\{\frac{fa_i}{(x-a_i)\varphi^{(m_i)} a_i}\right\}}{\partial a_i^{m_i-1}} + H\left\{\frac{1}{t-x}\cdot\frac{ft}{\varphi t}\right\}.$$

Lorsque fx contient le facteur $(x-a_i)^{m_i-1}$, cette équation se réduit après le développement de la différentielle à celle-ci:

$$\frac{fx}{\varphi x} = \overset{i=\mu}{\underset{i=1}{S}} m_i \frac{f^{m_i-1} a_i}{(x-a_i)\varphi^{(m_i)} a_i} + H\left\{\frac{1}{t-x}\cdot\frac{ft}{\varphi t}\right\},$$

ou bien, puisque dans ce cas $\frac{f^{(m_i-1)} a_i}{\varphi^{(m_i)} a_i} = \frac{fa_i}{\varphi' a_i}$, à

$$1 \qquad \frac{fx}{\varphi x} = \overset{i=\mu}{\underset{i=1}{S}} m_i \frac{fa_i}{(x-a_i)\varphi' a_i} + H\left\{\frac{1}{t-x}\cdot\frac{ft}{\varphi t}\right\}.$$

Supposant que les quantités a_1, a_2, ... a_μ dépendent d'une variable z, on aura, en faisant pour abréger $\left(\frac{\partial \varphi x}{\partial z}\right) = \varPhi \cdot x$,

$$\varPhi \cdot x = -m_1 K(x-a_1)^{m_1-1} \frac{\partial a_1}{\partial z}(x-a_2)^{m_2} \dots + \text{etc.}$$

D'ailleurs

$$\varPhi' x = \quad m_1 K(x-a_1)^{m_1-1}(x-a_2)^{m_2} \dots + \text{etc.}$$

donc

$$\frac{\varphi \cdot a_i}{\varphi' a_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial z},$$

ou bien

$$\varPhi' a_i = -\varPhi \cdot a_i \frac{\partial z}{\partial a_i},$$

et parconséquent

$$2. \qquad \frac{fx}{\varphi x} = \sum_{i=1}^{i=\mu} m_i \frac{fa_i}{(a_i-x)\varphi \cdot a_i}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial z} + H\left\{\frac{1}{t-x}\cdot\frac{ft}{\varphi t}\right\}.$$

Dans ce qui va suivre, ces deux formules seront appliquées aux fonctions

$$\frac{\theta'_1 x}{\theta_1 x}\varphi_1 x+\frac{\theta'_2 x}{\theta_2 x}\varphi_2 x+\ldots+\frac{\theta'_n x}{\theta_n x}\varphi_n x,$$

et

$$\frac{\theta^{\cdot}_1 x}{\theta_1 x}\varphi_1 x+\frac{\theta^{\cdot}_2 x}{\theta_2 x}\varphi_2 x+\ldots+\frac{\theta^{\cdot}_n x}{\theta_n x}\varphi_n x,$$

où $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ... $\varphi_n x$ ont la signification indiquée ci-dessus et où θx est une fonction de la forme

$$v_1 y^{n-1}+v_2 y^{n-2}+\ldots+v_{n-1} y+v_n,$$

v_1, v_2, ... v_n étant des fonctions entières de x, dont les coefficiens dépendent de z, et $\theta_1 x$, $\theta_2 x$, ... $\theta_n x$ étant les valeurs de θx lorsqu'on y fait $y=y_1, y_2, \ldots y_n$, enfin $\theta'_1 x=\frac{\partial\theta_1 x}{\partial x}$, $\theta^{\cdot}_1 x=\frac{\partial\theta_1 x}{\partial z}$ etc.

Cela posé, on voit que les deux fonctions sont rationnelles et symétriques par rapport aux racines y_1, y_2, ... y_n et parconséquent rationnelles en x. En les réduisant au même dénominateur, celui-ci prendra la forme

$$\theta_1 x.\theta_2 x\ldots\theta_n x = K(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_\mu)^{m_\mu},$$

K étant une constante.

Considérons maintenant un facteur quelconque, représenté par $(x-a)^m$. Puisque le produit $\theta_1 x.\theta_2 x\ldots\theta_n x$ contient ce facteur, on pourra toujours faire

$$\theta_1 x=(x-a)^{\nu_1}k_1,\quad \theta_2 x=(x-a)^{\nu_2}k_2,\quad\ldots\quad \theta_n x=(x-a)^{\nu_n}k_n,$$

où $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m$. On aura ainsi

$$\theta'_1 x=\nu_1(x-a)^{\nu_1-1}k_1+(x-a)^{\nu_1}\frac{\partial k_1}{\partial x}$$

etc.

$$\theta^{\cdot} x=-\nu_1(x-a)^{\nu_1-1}k_1\frac{\partial a}{\partial z}+(x-a)^{\nu_1}\frac{\partial k_1}{\partial z}$$

etc.

et la substitution de ces valeurs rend divisibles les deux fonctions fractionnaires haut et bas par $(x-a)^{m-1}$, de sorte qu'on peut les décomposer au moyen des formules ci-dessus.

Réduisant d'abord au même dénominateur la fonction

$$\frac{\theta'_1 x}{\theta_1 x}\varphi_1 x+\frac{\theta'_2 x}{\theta_2 x}\varphi_2 x+\ldots+\frac{\theta'_n x}{\theta_n x}\varphi_n x$$

et différentiant ensuite le denominateur par rapport a x, on a

$$\frac{\theta'_1 x.\theta_2 x.\theta_3 x\ldots\theta_n x.\varphi_1 x+\theta'_2 x.\theta_1 x.\theta_3 x\ldots\theta_n x.\varphi_2 x+\ldots}{\theta'_1 x.\theta_2 x.\theta_3 x\ldots\theta_n x+\theta'_2 x.\theta_1 x.\theta_3 x\ldots\theta_n x+\ldots}.$$

Substituant les valeurs de $\theta_1 x$, $\theta_2 x$, ... $\theta'_1 x$, $\theta'_2 x$, ... et faisant $x = a$, le resultat, multiplié par m et divisé par $x-a$, donnera, en vertu de la formule (1.), la fraction partielle

$$\frac{\nu_1\varphi_1 a+\nu_2\varphi_2 a+\ldots+\nu_n\varphi_n a}{x-a}.$$

Pour la fonction

$$\frac{\theta'_1 x}{\theta_1 x}\varphi_1 x+\frac{\theta'_2 x}{\theta_2 x}\varphi_2 x+\ldots+\frac{\theta'_n x}{\theta_n x}\varphi_n x$$

la formule (2.) donne de même la fraction partielle

$$\frac{\nu_1\varphi_1 a+\nu_2\varphi_2 a+\ldots+\nu_n\varphi_n a}{a-x}\cdot\frac{\partial a}{\partial z}.$$

Dans la suite on supposera une des quantités ν_1, ν_2, ... ν_n égale à m et les autres égales à zéro.

Après ces préliminaires, je passe à la première question ci-dessus mentionnée, et pour cela je donne à l'intégrale $\int X\partial x$ la forme $\int\frac{fx}{\varphi_k x}\partial x$. Si elle peut s'exprimer sous forme finie, on sait, qu'on peut toujours faire

$$\int\frac{fx}{\varphi_k x}\partial x = U+A_1\log V_1+A_2\log V_2+\ldots+A_h\log V_h = U+\Sigma A\log V,$$

où A_1, A_2, ... A_h sont des quantités constantes et U, V_1, V_2, ... V_h des fonctions rationnelles de x et y_k. (Voir Journal de l'école polytechnique cah. 23, pag. 42 et 59, mém. de Mr. *Liouville*.)

Au moyen de l'équation $y_k^n+p_1 y_k^{n-1}+\ldots+p_n = 0$, qui détermine y_n en fonction de x, on peut réduire ces fonctions aux formes suivantes:

$$U = r_1 y_k^{n-1}+r_2 y_k^{n-2}+\ldots+r_{n-1}y_k+r_n,$$

r_1, r_2, ... r_n étant des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires de x. Et parceque de l'équation $y_k^n+p_1 y_k^{n-1}+\ldots+p_n = 0$ on peut tirer $\frac{\partial y_k}{\partial x}$ en fonction rationnelle de x et y_k, on a de même

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U' = t_1 y_k^{n-1}+t_2 y_k^{n-2}+\ldots+t_{n-1}y_k+t_n,$$

t_1, t_2, ... t_n étant des fonctions rationnelles de x. Désignant ensuite par V une quelconque de fonctions V_1, V_2, ... V_h, on a

$$V = \frac{v_1 y_k^{n-1}+v_2 y_k^{n-2}+\ldots+v_{n-1}y_k+v_n}{s} = \frac{\theta_k x}{s},$$

où v_1, v_2, ... v_n et s sont des fonctions entières de x.

Ainsi donc, toutes les fois que l'intégrale $\int \frac{fx}{\varphi_k x} \partial x$ est exprimable sous forme finie, on pourra lui donner la forme

$$\int \frac{fx}{\varphi_k x} \partial x = U + \Sigma A \{\log \theta_k x - \log s\}.$$

Si les coëfficiens $A_1, A_2, \ldots . A_h$ sous le signe Σ satisfont à l'équation

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots . + \beta_h A_h = 0,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_h$ étant des nombres entiers, on pourra, en mettant au lieu de A_h sa valeur, diminuer d'une unité le nombre des logarithmes sous le signe Σ, et l'on pourra répéter cette réduction jusqu'à ce qu'elle devienne impossible, ou que la partie logarithmique ne contienne qu'un seul terme. Pour plus de simplicité nous nous dispenserons d'écrire le signe Σ, ce qui ne change pas le fond du raisonnement. On aura ainsi

$$\int \frac{fx}{\varphi_k x} = U + A \{\log \theta_k x - \log s\},$$

ce qui donne en différentiant

$$fx = U' \varphi_k x + A \left\{ \frac{\theta'_k x}{\theta_k x} \varphi_k x + \frac{s'}{s} \varphi_k x \right\}.$$

Cette équation doit subsister pour chacune des racines $y_1, y_2, \ldots . y_n$, c'est à dire pour toutes les valeurs de k depuis $k = 1$ jusqu'à $k = n$. Désignant donc les valeurs correspondantes de U par $U_1, U_2, \ldots . U_n$, on a, en faisant $k = 1, 2, \ldots . n$ et prenant la somme,

$$\begin{aligned} nfx = & U'_1 \varphi_1 + U'_2 \varphi_2 x + \ldots . + U'_n \varphi_n x \\ & + A \left\{ \frac{\theta'_1 x}{\theta_1 x} \varphi_1 x + \frac{\theta'_2 x}{\theta_2 x} \varphi_2 x + \ldots . + \frac{\theta'_n x}{\theta_n x} \varphi_n x \right\} \\ & - A \frac{s'}{s} \{\varphi_1 x + \varphi_2 x + \ldots . + \varphi_n x\}. \end{aligned}$$

Si, au moyen de cette équation, on veut trouver une fonction telle fx, que $\frac{fx}{\varphi_k x} \partial x$ devienne intégrable sous forme finie, $\varphi_k x$ étant donnée, il faut d'abord en déduire la forme de l'intégrale. Or c'est ce qu'on peut faire facilement dans un cas particulier très-étendu, savoir, lorsque les quotiens qu'on obtient en divisant chacune des fonctions $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots . \varphi_n x$ par une quelconque d'entre-elles, sont des quantités constantes. On a alors

$$\varphi_1 x = c_1 \Delta x, \quad \varphi_2 x = c_2 \Delta x, \quad \ldots . \quad \varphi_n x = c_n \Delta x,$$

Δx étant une fonction de x et $c_1, c_2, \ldots . c_n$ des constantes. Partant

$$\frac{fx}{\Delta x} = \frac{1}{n}(c_1 U_1' + c_2 U_2' + \dots + c_n U_n')$$
$$+ \frac{1}{n} A \left(c_1 \frac{\theta_1' x}{\theta_1 x} + c_2 \frac{\theta_2' x}{\theta_2 x} + \dots + c_n \frac{\theta_n' x}{\theta_n x}\right)$$
$$+ \frac{1}{n} A \frac{s'}{s} (c_1 + c_2 + \dots + c_n),$$

donc, en intégrant,

$$\int \frac{fx}{\Delta x} \partial x = \frac{1}{n}\{c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_n U_n\}$$
$$+ \frac{1}{n} A \{c_1 \log \theta_1 x + c_2 \log \theta_2 x + \dots + c_n \log \theta_n x\}$$
$$+ \frac{1}{n} A \log s \{c_1 + c_2 + \dots + c_n\}.$$

Telle est donc la forme de l'intégrale, si d'ailleurs elle existe sous forme finie.

Soit par exemple $\Delta x = \sqrt[n]{(\psi x)}$, ψx étant une fonction entière de x. On a dans ce cas $c_1 = \alpha$, $c_2 = \alpha^2$, ... $c_n = \alpha^n$, en représentant par α, α^2, ... α^n les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$.

Puisque

$$U_k = r_1 \alpha^{k(n-1)} \sqrt[n]{((\psi x)^{n-1})} + r_2 \alpha^{k(n-2)} \sqrt[n]{((\psi x)^{n-2})} + \dots + r_{n-1} \alpha^k \sqrt[n]{(\psi x)} + r_n,$$

on trouve, en vertu des propriétés des racines de l'unité,

$$\frac{1}{n}(c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_n U_n) = r \sqrt[n]{((\psi x)^{n-1})}$$

en écrivant simplement r au lieu de r_1. Donc

$$\frac{1}{n}\left(c_1 U_1' + c_2 U_2' + \dots + c_n U_n'\right) = (\psi x)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{n-1}{n} r (\psi x)^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial \psi x}{\partial x}.$$

On a d'ailleurs $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0$, donc

$$fx = \psi x . \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{n-1}{n} r \frac{\partial \psi x}{\partial x} + \frac{1}{n} A \sqrt[n]{(\psi x)} \left(\alpha \frac{\theta_1' x}{\theta_1 x} + \alpha^2 \frac{\theta_2' x}{\theta_2 x} + \dots + \alpha^n \frac{\theta_n' x}{\theta_n x}\right),$$

ou bien, en décomposant la fonction rationnelle

$$\lambda x = \sqrt[n]{(\psi x)} \left(\alpha \frac{\theta_1' x}{\theta_1 x} + \alpha^2 \frac{\theta_2' x}{\theta_2 x} + \dots + \alpha^n \frac{\theta_n' x}{\theta_n x}\right)$$

au moyen de la formule (1.) ci-dessus, en faisant

$$\theta_1 x . \theta_2 x \dots \theta_n x = K (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_\mu)^{m_\mu}$$

et supposant que $x = a_i$ ne fait évanouir qu'une seule de fonctions $\theta_1 x$, $\theta_2 x$, ... $\theta_n x$, $\theta_k x$ par exemple,

$$fx = \psi x \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{n-1}{n} r . \frac{\partial \psi x}{\partial x} + \frac{1}{n} A \left\{ \underset{i=1}{\overset{i=\mu}{S}} \frac{m_i \alpha^k \sqrt[n]{(\psi a_i)}}{x - a_i} + H\left(\frac{\lambda t}{t-x}\right) \right\},$$

équation qui donne la forme de la fonction rationnelle fx. Et la forme de l'intégrale sera

$$\int \frac{fx}{\sqrt[n]{(\psi x)}} \partial x = r \sqrt[n]{((\psi x)^{n-1})} + \frac{1}{n} A (\alpha \log \theta_1 x + \alpha^2 \log \theta_2 x + \ldots . + \alpha^n \log \theta_n x).$$

Le problème de décider si une telle intégrale existe sous forme finie, et de la trouver dans ce cas, se trouve ainsi réduit à celui de trouver s'il existe des fonctions r et θ et des constantes A, qui satisfont à l'équation ci-dessus lorsque fx et ψx sont des fonctions données. Pour le cas des fonctions elliptiques c'est la comparaison par rapport au paramètre. (Voir Vol. 4 pag. 274, 75 de ce journal.)

Si l'on veut que l'intégrale soit exprimable par des opérations algébriques seulement, elle doit avoir la forme

$$\int \frac{fx}{\sqrt[n]{(\psi x)}} = r \sqrt[n]{((\psi x)^{n-1})} = \frac{r \psi x}{\sqrt[n]{(\psi x)}},$$

ce qui est conforme a ce qu'à démontré Mr. *Liouville*, Vol. 10 pag. 356 de ce journal. Si au contraire on veut qu'elle s'exprime par des logarithmes seuls, et si en même temps fx est une fonction entière, on voit par la forme de cette fonction, que $\sqrt[n]{(\psi a_i)}$ doit se réduire à zéro pour toutes les valeurs de i, ou, en d'autres termes, que ψx doit être divisible par $(x-a_1)(x-a_2)\ldots$ $\ldots(x-a_\mu)$. (Pour le cas de $n=2$ voyez Vol. 1 pag. 288.) On a alors

$$fx = \frac{1}{n} A H \left(\frac{\lambda t}{t-x}\right),$$

équation qui détermine le plus haut degré que peut avoir la fonction fx pour que l'intégrale puisse s'exprimer par des logarithmes. (Pour le cas de $n=2$ voyez Vol. 1 pag. 200.)

Venons maintenant à la seconde question générale, et considérons pour cela la différentielle algébrique $X \partial x$ sous la forme $fx . \varphi_k x . \partial x$, fx étant une fonction rationnelle de x, dont le dénominateur soit

$$L (x-a_1)^{r_1} (x-a_2)^{r_2} \ldots . (x-a_\mu)^{r_\mu},$$

où L est une constante et où $r_1, r_2, \ldots . r_\mu$ sont des nombres entiers positifs ou zéro, et $\varphi_k x$ étant, comme ci-dessus, une fonction de x et y_k, laquelle

est une racine de l'équation

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_{n-1} y + p_n = 0.$$

Cela posé, la fonction transcendante $\int fx\, \varphi_k x\, \partial x = \psi x$ aura la propriété générale contenue dans le théorème suivant.

Si l'on substitue les racines $y_1, y_2, \ldots y_n$ de l'équation précedente dans une fonction entière quelconque de y:

$$\theta x = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y + q_n,$$

$q_1, q_2, \ldots q_n$ étant des fonctions entières de x, dont les coëfficiens dépendent d'une autre variable z, qu'on dénote les fonctions en résultantes par $\theta_1 x, \theta_2 x, \ldots \theta_n x$, et qu'on fasse

$$\theta_1 x . \theta_2 x . \theta_3 x \ldots \theta_n x = K(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \ldots (x-x_\mu)^{m_\mu};$$

si de plus $\psi x_1, \psi x_2, \ldots \psi x_\mu$ représentent les valeurs de ψx lorsque $x = x_1, x_2, \ldots x_\mu$, où l'on suppose que chacune des valeurs de x ne fait évanouir qu'une seule des fonctions θ et qu'on donne à y_k dans ψx la valeur correspondante; qu'on fasse enfin $fx\,(x-a_i)^{r_i} = \pi_i x$, on aura

$$\textbf{A.} \quad m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu$$

$$= \overset{i=m}{\underset{i=1}{S}} \frac{\partial^{r_i-1} \{\pi_i a_i (\varphi_1 a_i \log \theta_1 a_i + \varphi_2 a_i \log \theta_2 a_i + \ldots + \varphi_n a_i \log \theta_n a_i)\}}{1.2.3 \ldots (r_i-1)\, \partial a_i^{r_i-1}}$$

$$- H\{fx\,(\varphi_1 x \log \theta_1 x + \varphi_2 x \log \theta_2 x + \ldots + \varphi_n x \log \theta_n x)\} + C,$$

H représentant le coëfficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement suivant les puissances déscendantes de x, de la fonction affecté de ce signe, et C étant une quantité indépendante de z ou, ce qui est la même chose, de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ *).

La démonstration de ce théorème consiste dans les trois opérations suivantes.

1°. Réduire au même dénominateur la fonction

$$\frac{\theta_1^{\cdot} x}{\theta_1 x} \varphi_1 x + \frac{\theta_2^{\cdot} x}{\theta_n x} \varphi_2 x + \ldots + \frac{\theta_n^{\cdot} x}{\theta_n x} \varphi_n x \quad \text{où} \quad \theta^{\cdot} x = \frac{\partial \theta x}{\partial z},$$

décomposer ensuite en faisant usage de la formule (2.), et intégrer par rapport à z. On obtient ainsi, en faisant pour abréger

$$\varphi_1 x \log \theta_1 x + \varphi_2 x \log \theta_2 x + \ldots + \varphi_n x \log \theta_n x = \lambda x,$$

$$\textbf{I.} \quad \overset{h=\mu}{\underset{h=1}{S}} \int \frac{m_h \varphi_k x_h}{x_h - x} \partial x_h = \lambda x - H\left\{\frac{\lambda t}{t-x}\right\} + C_1,$$

en supposant que $x = x_h$ donne $\theta_k x = 0$.

---

*) Ce théorème est le même que celui qu'on trouve dans la note insérée Tom. 19 p. 113.

toutes les fois que l'avant-dernier terme de l'équation $y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n$ est nul ou divisible par le dernier terme, ou que q_n ne contient pas x.

Si une de ces conditions a lieu, on aura en faisant

$$\int \frac{fx}{y_k} \partial x = \psi x, \qquad y_k = \Delta_k x,$$

$$B. \quad m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu$$

$$= \underset{i=1}{\overset{i=\omega}{S}} \frac{\partial^{r_i - 1} \left\{ \pi_i a_i \left(\frac{\log \theta_1 a_i}{\Delta_1 a_i} + \frac{\log \theta_2 a_i}{\Delta_2 a_i} + \ldots + \frac{\log \theta_n a_i}{\Delta_n a_i} \right) \right\}}{1.2.3 \ldots (r_i - 1) \partial a_i^{r_i - 1}}$$

$$- H \left\{ fx \left(\frac{\log \theta_1 x}{\Delta_1 x} + \frac{\log \theta_2 x}{\Delta_2 x} + \ldots + \frac{\log \theta_n x}{\Delta_n x} \right) \right\} + C.$$

Cette équation peut se déduire immédiatement de la même manière que l'équation (*A.*). En effet, on démontre comme suit, que si une des conditions ci-dessus a lieu, la fonction rationnelle en x

$$\frac{\theta_1' x}{\theta_1 x \Delta_1 x} + \frac{\theta_2' x}{\theta_2 x \Delta_2 x} + \ldots + \frac{\theta_n' x}{\theta_n x \Delta_n x}, \quad \left(\text{où} \quad \theta' x = \frac{\partial \theta x}{\partial x} \right)$$

étant réduite au même dénominateur, devient divisible en haut et en bas par $\Delta_1 x . \Delta_2 x \ldots \Delta_n x$. Pour fixer les idées nous supposerons $n = 3$, de sorte qu'on aura la fonction $\frac{\theta_1'}{\theta_1 \Delta_1} + \frac{\theta_2'}{\theta_2 \Delta_2} + \frac{\theta_3'}{\theta_3 \Delta_3}$ en écrivant θ et Δ au lieu de θx et Δx. On a dans ce cas

$$\theta_1 = q_1 \Delta_1^2 + q_2 \Delta_1 + q_3, \quad \text{donc} \quad \theta_1' = q_1' \Delta_1^2 + q_2' \Delta + q_3'.$$

Parconséquent, en divisant θ_1' par θ_1 et faisant

$$\frac{q_3'}{q_3} = A, \quad q_2' - \frac{q_3'}{q_3} q_2 = B, \quad q_1' - \frac{q_3'}{q_3} q_1 = C,$$

il vient $\frac{\theta_1'}{\theta_1} = A + \frac{(B + C\Delta_1)\Delta_1}{\theta_1}$, et de même pour $\frac{\theta_2'}{\theta_2}$ et $\frac{\theta_3'}{\theta_3}$. Or

$$\frac{\theta_1'}{\theta_1 \Delta_1} + \frac{\theta_2'}{\theta_2 \Delta_2} + \frac{\theta_3'}{\theta_3 \Delta_3} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \left\{ \frac{\theta_1'}{\theta_1} \Delta_2 \Delta_3 + \frac{\theta_2'}{\theta_2} \Delta_1 \Delta_3 + \frac{\theta_3'}{\theta_3} \Delta_1 \Delta_2 \right\},$$

donc en substituant la valeur de $\frac{\theta_1'}{\theta_1}$ et celles de $\frac{\theta_2'}{\theta_2}$ et $\frac{\theta_3'}{\theta_3}$,

$$\frac{\theta_1'}{\theta_1 \Delta_1} + \frac{\theta_2'}{\theta_2 \Delta_2} + \frac{\theta_3'}{\theta_3 \Delta_3} = A \frac{\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_1 \Delta_3 + \Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} + \frac{B + C\Delta_1}{\theta_1} + \frac{B + C\Delta_2}{\theta_2} + \frac{B + C\Delta_3}{\theta_3},$$

ou bien en substituant les valeurs de *A*, *B*, *C* et réduisant au même dénominateur:

$$\frac{\theta'_1}{\theta_1\Delta_1}+\frac{\theta'_2}{\theta_2\Delta_2}+\frac{\theta'_3}{\theta_3\Delta_3}=$$
$$\frac{q'_3(\Delta_2\Delta_3+\Delta_1\Delta_3+\Delta_1\Delta_2)\theta_1\theta_2\theta_3+[(q_3q'_2-q_2q'_3)+(q_3q'_1-q_1q'_3)\Delta_1]\Delta_1\Delta_2\Delta_3\theta_2\theta_3+\dots}{q_3\Delta_1\Delta_2\Delta_3\theta_1\theta_2\theta_3}.$$

Cette fraction est toujours divisible en haut et en bas par q_3; donc si $\Delta_2\Delta_3+\Delta_1\Delta_3+\Delta_1\Delta_2$ est nul ou divisible par $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ ou enfin $q'_3=0$, c'est à dire q_3 indépendant de x, le dénominateur sera seulement $\theta_1\theta_2\theta_3$.

On conclura donc, que si une des conditions ci-dessus est remplie, on pourra considérer la fonction

$$\frac{\theta'_1x}{\theta_1x\Delta_1x}+\frac{\theta'_2x}{\theta_2x\Delta_2x}+\dots+\frac{\theta'_nx}{\theta_nx\Delta_nx}$$

comme fraction rationnelle qui a pour dénominateur $\theta_1x.\theta_2x\dots\theta_nx$, et en la traitant par conséquent comme nous l'avons fait pour la fonction

$$\frac{\theta_1x}{\theta_1x}\varphi_1x+\frac{\theta'_2x}{\theta_nx}\varphi_2x+\dots+\frac{\theta'_nx}{\theta_nx}\varphi_nx,$$

on trouvera la formule (*B.*) par les mêmes opérations qui nous ont conduits à l'équation (*A.*).

Supposons les fonctions Δ_1x, Δ_2x, ... Δ_nx déterminées par l'équation

$$y^n-(\Delta x)^n=0,$$

$(\Delta x)^n$ étant une fonction entière de x, que l'on peut représenter par R, de sorte que $\Delta x=\sqrt[n]{R}$. Pour ce cas on peut faire usage de l'équation (*B.*). Donc si l'on fait

$$\Delta_1x=\alpha\Delta x,\quad \Delta_2x=\alpha^2\Delta x,\quad \dots\quad \Delta_nx=\alpha^n\Delta x,$$

α, α^2, ... α^n étant les racines de l'unité, et

$$\int\frac{fx}{\alpha^k\Delta x}\partial x=\psi x,$$

on aura le théorème suivant *), en déterminant toujours l'exposant k de sorte qu'il soit égal à l'indice de celle des fonctions θ, qui s'évanouit lorsque $x=x,\ x_2,\ \dots\ x_\mu$:

---

*) Ce théorème, dont la démonstration se trouve aussi dans le vol. 19. page 86 et 87 de ce journal, est le même que celui que Mr. *Broch* a démontré dans le vol. 20 pag. 178 et suiv., en suivant la marche qu'a tracée son illustre compatriote pour le cas $n=2$, vol. 3 page 314. Pour le démontrer il n'y a qu'à faire

$$fx=\frac{Fx}{x-a},\quad F \text{ désignant une fonction entière,}$$

donc $r_1=1,\ r_2=r_3=\dots=0,\ a_1=a,\ \pi_1x=Fx,\ m_1=m_2=\dots=1,$

$$C.\quad m_1\psi x_1+m_2\psi x_2+\ldots+m_\mu\psi x_\mu$$
$$=\overset{i=\omega}{\underset{i=1}{S}}\frac{\partial^{r_i-1}\left\{\frac{\pi_i a_i}{\Delta a_i}\left(\frac{\log\theta_1 a_i}{\alpha}+\frac{\log\theta_2 a_i}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\log\theta_n a_i}{\alpha^n}\right)\right\}}{1.2.3\ldots(r_i-1)\,\partial a_i^{r_i-1}}$$
$$-H\left\{\frac{fx}{\Delta x}\left(\frac{\log\theta_1 x}{\alpha}+\frac{\log\theta_2 x}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\log\theta_n x}{\alpha^n}\right)\right\}+C.$$

Si l'on suppose $n=2$, donc $\alpha=-1$, $\theta_1 x=\lambda_1 x-\lambda_2 x\,\Delta x$, $\theta_2 x=\lambda_1 x+\lambda_2 x\,\Delta x$, où λ_1 et λ_2 sont des fonctions entières, $fx=\frac{\varphi x}{x-a}$ où φ est une fonction entière, donc $r_1=1$, $r_2=\ldots=0$, et qu'on fasse

$$\int\frac{\varphi x\,\partial x}{(x-a)\Delta x}=\psi x,$$
$$(\lambda_1 x)^2-(\lambda_2 x)^2(\Delta x)^2=K(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_\mu)^{m_\mu},$$

$$\psi x=\frac{1}{\alpha^k}\int\frac{Fx}{(x-a)\Delta x}\partial x,$$
$$\theta_k x=q_1\alpha^{k(n-1)}(\Delta x)^{n-1}+q_2\alpha^{k(n-2)}(\Delta x)^{n-2}+\ldots+q_{n-1}\alpha_k\Delta x+q_n,$$

par conséquent

$$\psi x_1+\psi x_2+\ldots+\psi x_\mu$$
$$=\frac{Fa}{\Delta a}\left(\frac{\log\theta_1 a}{\alpha}+\frac{\log\theta_2 a}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\log\theta_n a}{\alpha^n}\right)$$
$$-H\left\{\frac{Fx}{(x-a)\Delta x}\left(\frac{\log\theta_1 x}{\alpha}+\frac{\log\theta_2 x}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\log\theta_n x}{\alpha^n}\right)\right\}+C;$$

Voilà le théorême fondamental de Mr. *Broch*, sauf la seule différence, qu'il a transformé le second membre en fonctions réelles logarithmiques et circulaires au moyen des expressions trigonométriques des racines de l'unité. En effet, il prouve que si l'on fait

$$\Pi x=\int\frac{Fx\,\partial x}{(x-a)\sqrt[n]{(Rx)}},$$
$$B_r x=c_r^{n-1}f_{n-1}x\sqrt[n]{((Rx)^{n-1})}+c_r^{n-2}f_{n-2}x\sqrt[n]{((Rx)^{n-2})}+\ldots+c_r f_1 x\sqrt[n]{(Rx)}+f_0 x,$$

c_1, c_2, ... c_n étant les racines de l'unité, et $B_1 x\,.\,B_2 x\,\ldots\ldots\,B_n x=A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\mu)$, on a (formule 26 et 34)

$$\frac{1}{c_1}\Pi x_1+\frac{1}{c_2}\Pi x_2+\ldots+\frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu$$
$$=\frac{Fa}{\sqrt[n]{(Ra)}}\sum_1^n{}_r\frac{1}{c_r}\log B_r a-\varpi\left(\frac{Fx}{(x-a)\sqrt[n]{(Rx)}}\sum_1^n{}_r\frac{1}{c_r}\log B_r x\right)+C,$$

ϖ désignant le coëfficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction sous ce signe suivant les puissances déscendantes de x, et c_1, c_2, ... c_μ étant déterminées par les équations (17.) et (41.) qu'on tire de (14.) $B_r x=0$.

on aura, en déterminant les signes de ψx_1, ψx_2, ... ψx_μ par la règle donnée:

$$m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu$$
$$= \frac{\varphi a}{\Delta a} \log \left\{ \frac{\lambda_1 a + \lambda_2 a \Delta a}{\lambda_1 a - \lambda_2 a \Delta a} \right\} - H \left\{ \frac{\varphi x}{(x-a)\Delta x} \log \frac{\lambda_1 x + \lambda_2 x \Delta x}{\lambda_1 x - \lambda_2 x \Delta x} \right\} + C,$$

ce qui est le théorème d'*Abel* (vol. 3. page 318). Lorsque $\Phi x = x - a$, le second membre se réduit à la constante C, donc en faisant $\int \frac{\partial x}{\Delta x} = \psi x$,

$$m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu = \text{Const.}$$

On sait que le théorème fondamental pour les fonctions elliptiques n'est qu'un cas particulier de celui-ci. Voici comment on en peut le tirer sous la forme presentée d'abord par *Euler* et *Lagrange*.

Soit

$\Delta x = \sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}$, $\lambda_1 x = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\lambda_2 x = 1$,

alors l'équation $(\lambda_1 x)^2 - (\lambda_2 x)^2 (\Delta x)^2 = 0$ devient

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

ou bien

$$x^4 + \frac{2\beta\gamma - D}{\gamma^2 - E} x^3 + \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma - C}{\gamma^2 - E} x^2 + \frac{2\alpha\beta - B}{\gamma^2 - E} x + \frac{\alpha^2 - A}{\gamma^2 - E} = 0.$$

Si maintenant x_1, x_2, c, $-c$ doivent être les racines de cette équation, on aura entre β et γ la rélation

$$\frac{D - 2\beta\gamma}{\gamma^2 - E} = x_1 + x_2 + c - c = x_1 + x_2,$$

d'où l'on tire

$$D + E(x_1 + x_2) = 2\beta\gamma + \gamma^2 (x_1 + x_2),$$

ou, en multipliant par $x_1 + x_2$, ajoutant β^2 de part et d'autre et extrayant la racine carrée,

$$\sqrt{(\beta^2 + D(x_1 + x_2) + E(x_1 + x_2)^2)} = \beta + \gamma(x_1 + x_2).$$

Or, en supposant que x_1 et x_2 satisfont tous deux à l'équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = +\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} = \Delta x,$$

on a en les substituant et soustrayant

$$\beta(x_1 - x_2) + \gamma(x_1^2 - x_2^2) = \Delta x_1 - \Delta x_2,$$

ou

$$(x_1 - x_2)[\beta + \gamma(x_1 + x_2)] = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

ce qui par la valéur de $\beta + \gamma(x_1 + x_2)$ devient

$$(x_1 - x_2)\sqrt{(\beta^2 + D(x_1 + x_2) + E(x_1 + x_2)^2)} = \Delta x_1 - \Delta x_2,$$

β restant indeterminé. Telle est la rélation entre x_1 et x_2 qui, en sup-

posant c, et par conséquent $\psi(c)$ et $\psi(-c)$ constants, répond à l'équation

$$\psi x_1 + \psi x_1 = \text{Const.}$$

Voyez *Lacroix* traité du calc. diff. et du calc. int. Tome II. page 475 et 481.

Si l'on veut avoir le théorème d'*Abel* sous la forme qu'il lui a donné dans son précis d'une théorie des fonctions elliptiques (vol. 4. page 246), on fera dans l'équation $(C.)$ $n=2$, donc

$$a=1, \quad \theta_1 x = \lambda_1 x - \lambda_2 x \Delta x, \quad \theta_2 x = \lambda_1 x + \lambda_2 x \Delta x,$$

$$fx = \frac{1}{a^2-x^2} = -\frac{1}{(x-a)(x+a)}, \text{ donc } r_1 = r_2 = 1, \quad \omega = 2, \quad a_1 = a,$$

$$a_2 = -a, \quad \pi_1 a_1 = -\frac{1}{2a}, \quad \pi_2 a_2 = \frac{1}{2a}, \quad \dot{H}(\psi x) = 0.$$

Par conséquent si $\int \frac{\partial x}{(a^2-x^2)\Delta x} = \psi x$, on a

$$m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu$$

$$= C - \frac{1}{2a}\left\{\frac{\log(\lambda_1 a + \lambda_2 a \Delta a)}{\Delta a} - \frac{\log(\lambda_1 a - \lambda_2 a \Delta a)}{\Delta a}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2a}\left\{\frac{\log(\lambda_1(-a) + \lambda_2(-a)\Delta(-a))}{\Delta(-a)} - \frac{\log(\lambda_1(-a) - \lambda_2(-a)\Delta(-a))}{\Delta(-a)}\right\}.$$

Mais à l'endroit cité on a supposé que Δx est une fonction paire de x, c'est à dire une fonction telle que $\Delta(-x) = \Delta x$, donc

$$m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu x_\mu$$

$$= C - \frac{1}{2a\Delta a}\Big\{\log(\lambda_1 a + \lambda_2 a \Delta a) - \log(\lambda_1 a - \lambda_2 a \Delta a)$$

$$- \log(\lambda_1(-a) + \lambda_2(-a)\Delta a) + \log(\lambda_1(-a) - \lambda_2(-a)\Delta a)\Big\}.$$

Si l'on a $\lambda_1 a = \lambda_1(-a)$, $\lambda_2 a = -\lambda_2(-a)$, c'est à dire si la première de ces fonctions est paire, la seconde impaire, le premier et le quatrième terme du second membre, ainsi que le second et le troisième terme sont égaux entre eux. Et si $\lambda_1 a = -\lambda_1(-a)$, $\lambda_2 a = \lambda_2(-a)$, de sorte que la première de ces fonctions est impaire et la seconde paire, le même a lieu, à cause de $\log -z) = \log(+z) + \text{Const.}$ Donc si l'une de ces fonctions est paire, l'autre impaire, comme on le suppose à l'endroit cité, il vient

$$m_1 \psi x_1 + m_2 \psi x_2 + \ldots + m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{1}{a\Delta a}\log\left(\frac{\lambda_1 a + \lambda_2 a \Delta a}{\lambda_1 a - \lambda_2 a \Delta a}\right).$$

Or Δx étant une fonction paire, on voit sans peine, que ψx change de signe en même temps que x. De plus, les valeurs x_1, x_2, ... x_μ, déterminées par l'équation $(\lambda_1 x)^2 - (\lambda_2 x)^2 (\Delta x)^2 = 0$, qui ne contient que x^2, seront deux à deux égales avec des signes contraires, et si l'une satisfait

à l'équation $\lambda_1 x - \lambda_2 x = \theta_1 x = 0$, l'autre satisfera à $\lambda_1 x + \lambda_2 x \Delta x = \theta_2 x = 0$, parceque l'une des fonctions $\lambda_1 x$, $\lambda_2 x$ est paire et l'autre impaire. Il suit de là que les radicaux Δx_1, Δx_2, ... Δx_μ dans les fonctions ψx_1, ψx_2, ... ψx_μ changent de signe avec les variables x_1, x_2, ... x_μ, de sorte que ces fonctions sont deux à deux égales et avec les mêmes signes, et que les valeurs correspondantes de m sont pareillement égales entre-elles. En écrivant donc 2μ au lieu de μ, multipliant par $\frac{1}{2}a^2$ et faisant

$$\int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x} = \Pi x,$$

on a enfin

$$m_1 \Pi x_1 + m_2 \Pi x_2 + \ldots + m_\mu \Pi x_\mu = C - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{\lambda_1 a + \lambda_2 a \Delta a}{\lambda_1 a - \lambda_2 a \Delta a} \right\},$$

équation du théorème. Toutes les valeurs x_1, x_2, ... x_μ donnent alors $\lambda_1 x + \lambda_2 x \Delta x = 0$.

Si au contraire $\lambda_1 x$ et $\lambda_2 x$ étaient toutes les deux paires ou toutes les deux impaires, les logarithmes du second membre de l'équation ci-dessus se détruiraient; mais dans ce cas le même aurait lieu pour les fonctions du premier membre, parceque deux valeurs de x égales et de signe contraire répondraient alors à une même des équations $\theta_1 x = 0$, $\theta_2 x = 0$, ou, ce qui revient au même, à un même signe du radical.

17 Juillet 1840.

4.

Note, relative à un mémoire de Mr. Richelot sur quelques intégrales définies.

(Par Mr. *Chr. Jürgensen* de Copenhague.)

Dans le Tome XXI. pag. 293 de ce journal se trouve un mémoire de Mr. *Richelot* sur quelques intégrales définies, dont la somme peut s'exprimer au moyen de la quadrature et de la division du cercle. Je vais faire voir, que les théorèmes fort interessants auxquels l'auteur y est parvenu, et d'autres semblables peuvent être démontrés d'une manière un peu plus simple, ou plutôt qu'ils sont tous contenus comme cas particuliers dans la formule générale pour la décomposition des fonctions de la forme

$$Fb = \frac{B}{(b-a_1)^{1-\mu_1}(b-a^2)^{1-\mu_2}\dots(b-a_n)^{1-\mu_n}},$$

B étant une fonction entière de b et $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ les quantités comprises entre zéro et l'unité, formule que j'ai donnée vol. XIX. de ce journal.

En effet, si l'on transcrit en quadratures définies la dernière formule de ce mémoire (vol. XIX. pag. 90) on aura, en mettant b au lieu de x,

$$Fb = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \frac{\sin\mu_i\pi}{(-1)^{\mu_i}\pi} \int_0^1 \frac{F\left(\frac{a_i}{\theta}\right)}{b\theta - a_i} \cdot \frac{a_i\partial\theta}{\theta} + H\left(\frac{Ft}{t-b}\right),$$

sous condition que $b < a_i$ pour toutes les valeurs de i, et que $\left(\frac{Ft}{t-b}\right)$ puisse être développé suivant les puissances entières déscendantes de t, ce qui a lieu lorsque $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ est un nombre entier. Si l'on fait dans cette formule $\frac{a_i}{\theta} = x$, on trouve en renversant les limites

$$Fb = S\frac{\sin\mu_i\pi}{(-1)^{\mu_i}\pi} \int_{a_i}^{\frac{a_i}{0}} \frac{Fx}{b-x}\partial x + H\left(\frac{Ft}{t-b}\right).$$

Cette formule est même un peu plus générale que la précédente, en ce qu'on peut prendre la quantité $\frac{a_i}{0}$ en plus ou en moins pour éviter le passage par l'infini ainsi que la condition $b < a_i$. Cela tient à ce qu'on ne peut pas faire varier $\frac{a_i}{\theta}$ continuellement depuis zéro jusqu'à l'infini de signe contraire en faisant varier θ depuis l'unité jusqu'à zéro.

Il serait facile de présenter la démonstration de ces formules indépendamment de la considération des intégrales à indices fractionnaires et de la même manière du reste, dont nous nous sommes servi à l'endroit cité, mais on y parviendra de la manière bien plus simple encore, que Mr. *Ramus*, professeur à l'université de Copenhague, a bien voulu me communiquer, et que voici.

En faisant dans l'intégrale connue $\int_0^\infty \frac{n z^{m-1}\partial z}{1+z^n} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi}$ $(m<n)$ (*Lacroix* Traité du calç. diff. et int. III. pag. 417 et suiv.) $z^n = y$, et écrivant ensuite μ au lieu de $\frac{m}{r}$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\partial y}{(1+y)y^{1-\mu}} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}.$$

Supposant $y = \frac{x-a}{a-b}$, on trouve

$$\frac{\sin\mu\pi}{(-1)^\mu\pi}\int_a^{\pm\infty} \frac{\partial x}{(b-x)(x-a)^{1-\mu}} = \frac{1}{(b-a)^{1-\mu}},$$

où l'on doit prendre le signe $+$ si $b<a$ et le signe $-$ si $b>a$. Maintenant on a la formule connue

$$fb = \frac{b}{(b-a_1)(b-a)\dots(b-a_n)} = S\frac{\varphi_i a_i}{b-a_i} + H\left(\frac{ft}{t-b}\right),$$

$\varphi_i x$ étant $=(x-a_i)fx$ et H le coëfficient de $\frac{1}{t}$. Mettant dans cette formule x au lieu de a_i, multipliant par $\frac{\sin\mu_i\pi}{(-1)^{\mu_i}\pi}\cdot\frac{\partial x}{(x-a_i)^{1-\mu_i}}$, intégrant depuis $x=a_i$ jusqu'à $x=\pm\infty$, selon que $b<a_i$ ou $b>a_i$ et répétant ceci pour toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n, on trouve le théorème suivant.

Lorsque $a_1>a_2>a_3\dots>a_n$ et $a_p>b>a_{p+1}$ on a

$$Fb = \overset{i=p}{\underset{i=1}{S}}\frac{\sin\mu_i\pi}{(-1)^{\mu_i}\pi}\int_{a_i}^{+\infty}\frac{Fx\,\partial x}{b-x} + \overset{i=n}{\underset{i=p+1}{S}}\frac{\sin\mu_i\pi}{(-1)^{\mu_i}\pi}\int_{a_i}^{-\infty}\frac{Fx\,\partial x}{b-x} + H\left(\frac{Ft}{t-b}\right),$$

Fb désignant, comme ci-dessus, la fonction

$$\frac{B}{(b-a_1)^{1-\mu_1}(b-a_2)^{1-\mu_2}\dots(b-a_n)^{1-\mu_n}}$$

Il est très facile de déduire delà tous les théorèmes fondamentaux de Mr. *Richelot*. Si l'on veut avoir le théorème 5me page 314 et 315 par exemple, on fera $B=fb$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=1-\mu_1$, $\mu_3=\mu$, $\mu_4=1-\mu$, et ainsi de suite jusqu'à $\mu_{2k-1}=\mu$, $\mu_{2k}=1-\mu$, de sorte que deux termes consé-

cutifs sous le signe S deviennent, en supposant que b ne soit pas compris entre les limites a_{2m-1} et a_{2m} et que $a_{2m-1} > a_{2m}$,

$$\frac{\sin\mu\pi}{(-1)^\mu\pi}\int_{a_{2m-1}}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.(x-a_2)^\mu}+\frac{\sin(1-\mu)\pi}{(-1)^{1-\mu}\pi}\int_{a_{2m}}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.(x-a_{2k})^\mu}$$

$$=-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_{2m}}^{a_{2m-1}}\frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.(x-a_{2k})^\mu}=+\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_{2m}}^{a_{2m-1}}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}$$

suivant la notation dans le mémoire cité page 315. (Par faute d'impression il y a $x-a_1$ sous le radical au lieu de a_1-x; voyez page 313). On trouve ainsi

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\int_{a_4}^{a_3}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\ldots.+\int_{a_{2k}}^{2k-1}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}=\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left\{Fb-H\left(\frac{Ft}{t-b}\right)\right\},$$

ce qui est le 5me théorème.

Pour avoir le 7me théorème page 323, on fera $B=fb$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=1-\mu$, $\mu_3=1-\mu$, $\mu_4=\mu$, $\mu_5=\mu$, $\mu_6=1-\mu$, ... $\mu_{4k-1}=1-\mu$, $\mu_{4k}=\mu$, de sorte que les deux premiers termes sous le signe S deviennent, en supposant que b soit hors des limites a_1 et a_2 et que $a_1>a_2$,

$$\frac{\sin\mu\pi}{(-1)^\mu\pi}\int_{a_1}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}+\frac{\sin(1-\mu)\pi}{(-1)^{1-\mu}\pi}\int_{a_2}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}$$

$$=-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_2}^{a_1}\frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_2}^{a_1}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}$$

suivant la notation du mémoire cité page 323. Les deux termes suivants deviennent

$$\frac{\sin(1-\mu)\pi}{(-1)^{1-\mu}\pi}\int_{a_3}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}+\frac{\sin\mu\pi}{(-1)^\mu\pi}\int_{a_4}^{\pm\infty}\frac{fx\,\partial x}{(b-x)(x-a_1)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}$$

$$=+\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_4}^{a_3}\frac{fx\,\partial x}{(x-b)(a_1-x)^{1-\mu}(x-a_2)^\mu\ldots.}=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_{a_3}^{a_4}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}$$

et ainsi de suite, donc

$$\int_{a_2}^{a_1}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\int_{a_3}^{a_4}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}+\ldots.+\int_{a_{4k-1}}^{a_{4k}}\frac{Xfx\,\partial x}{x-b}=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\left\{Fb-H\left(\frac{Ft}{t-b}\right)\right\},$$

ce qui est le 7me théoréme.

27 Mars 1841.

5.

Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-rp-1}\mathfrak{F}(x^p)(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}}dx$.

(Par Mr. *O. J. Broch*, Candidat en philosophie de Norvège.)

(Présenté à l'Académie des sciences à Paris le 19me Avril 1841 approuvé et designé à être inséré dans le Récueil des Savants étrangers le 10me Mai 1841.)

RAPPORT.

(Commissaires, MM. *Liouville*, *Cauchy* rapporteur.)

„Les géomètres connaissent les beaux travaux d'*Abel* et de M. *Jacobi*, sur la théorie des transcendantes elliptiques. On sait que d'importants Mémoires, relatifs à cette théorie, ont été composés par *Abel*, dans l'année 1826 et les deux suivantes, que plusieurs de ces Mémoires ont été publiés dès cette èpoque, même dès l'année 1826, dans le *Journal scientifique* de M. *Crelle*; que l'un d'eux en particulier a été approuvé par l'Académie en 1829, sur le rapport d'une Commission dont M. *Legendre* faisait partie, puis couronné par l'Institut en 1830, et que la valeur du prix fut remise à la mère d'*Abel*. En effet, cet illustre Norwégien, qu'un projet de mariage avait déterminé à entreprendre un voyage au plus fort de l'hiver, était malheureusement tombé malade vers le milieu de janvier 1829, et malgré les soins qui lui furent prodigués par la famille de sa fiancée, il était mort d'une phthisie, le 6 avril, alité depuis trois mois.

„C'est encore aujourd'hui pour les travaux d'un jeune Norwégien, d'un compatriote d'*Abel*, que nous avons à réclamer un moment d'attention de la part de l'Académie. Le Mémoire de M. *Broch* a pour objet une certaine classe d'intégrales qui comprennent, comme cas particulier, les transcendantes elliptiques. Ces intégrales sont celles dont la dérivée peut être considérée comme le produit d'une certaine puissance entière de la variable x par deux facteurs, dont le premier est une fonction rationnelle d'une autre puissance entière x^p de x, et le second une racine quelconque d'une semblable

fonction. Ces mêmes intégrales forment une classe particulière de transcendantes, qui se réduisent aux fonctions elliptiques, lorsque, le radical étant du second degré, le polynome renfermé sous le radical est du 4ᵉ degré.

„Dans le premier chapitre de son Mémoire, M. *Broch* s'occupe de la sommation des transcendantes en question, considérées comme fonctions de la variable x, ou plutôt de la sommation des valeurs que peut acquérir une semblable fonction pour des valeurs diverses de la variable. Il établit plusieurs théorèmes dignes de remarque; et prouve, par exemple, que la somme des diverses valeurs de la fonction, correspondantes aux diverses racines d'une certaine équation algébrique, peut être exprimée à l'aide d'une fonction algébrique et logarithmique des quantités que renferme l'équation dont il s'agit. Il montre ensuite le parti qu'on peut tirer de ce théorème et de quelques autres pour la réduction de la nouvelle espèce de transcendantes.

„Dans les derniers chapitres de son Mémoire, M. *Broch* fait voir qu'une transcendante quelconque de la forme indiquée peut toujours être exprimée à l'aide d'un certain nombre de fonctions plus simples de la même forme, et d'une fonction algébrique et logarithmique de la variable x. Les fonctions irréductibles entre elles constituent alors, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, diverses classes de transcendantes. Quand le nombre de ces fonctions irréductibles se réduit à zéro, l'intégration s'effectue complétement, à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques. Dans tout autre cas, elle est impossible. D'ailleurs, comme on devait s'y attendre les cas où l'intégration s'effectue restent les mêmes, soit qu'on les déduise des théorèmes énoncés dans la première partie du Mémoire, ou de la méthode de réduction indiquée dans la seconde.

„Nous devons observer ici, 1° que les théorèmes énoncés par M. *Broch* s'accordent, dans des cas particuliers, avec ceux que renferment divers Mémoires d'*Abel*; 2° que M. *Broch* avait déjà traité, dans *le Journal de M. Crelle*, le cas où l'exposant p se réduit à l'unité; 3° qu'un Mémoire de deux pages, publié dans le premier volume des *Oeuvres d'Abel*, contient les bases d'une théorie qui pourrait s'appliquer aux transcendantes considérées par M. *Broch*; 4° que ces mêmes transcendantes se trouvent aussi considérées dans le Mémoire d'*Abel* qui a remporté le prix, mais que M. *Broch* n'a pu connaître, puisqu'il n'est pas encore publié.

„Avant de terminer ce rapport où nous avons eu souvent à rappeler les travaux d'*Abel*, il nous paraît convenable de détruire une erreur assez généralement répandue. On a supposé qu'*Abel* était mort dans la misère, et cette supposition est devenue l'occasion de violentes attaques dirigées contre les savants de la Norwège et des autres parties de l'Europe. Nous aimons à croire que les auteurs de ces attaques regretteront de s'être exprimés avec tant de vivacité, quand ils liront la préface des *Oeuvres d'Abel*, publiées récemment en Norwège, par M. *Holmboe*, le professeur et l'ami de l'illustre géomètre. Ils y verront avec intérêt les encouragements flatteurs, les témoignages d'estime et d'admiration qu'*Abel*, durant sa vie, a reçus des savants, particulièrement de ceux qui s'occupaient, en même temps que lui, de la théorie des transcendantes elliptiques; et ils remarqueront avec consolation, au bas de la page VII, ces paroles qui suffiront pour éclaircir tous leurs doutes:

„*Un journal français dont je ne me rappelle pas le nom, m'est venu sous les yeux, où l'on a rapporté qu'Abel est mort dans la misère. On voit par les détails ci-dessus que ce rapport n'est pas conforme à la vérité.*

„Revenons à M. *Broch*. Ce que nous avons dit de ses recherches suffit pour en montrer toute l'importance. Les résultats auxquels il est arrivé, analogues à ceux qu'*Abel* a obtenus dans ses plus beaux Mémoires, montrent un esprit familiarisé avec les méthodes analytiques, et habitué à lutter avec succès contre les difficultés que présentent les parties les plus élevées du calcul intégral. En résumé, le Mémoire de M. *Broch* prouve que l'auteur n'a pas trop présumé de ses forces en se proposant de marcher sur les traces d'*Abel*. Nous pensons que ce Mémoire est digne de l'approbation de l'Académie, et d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*."

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Dans le mémoire suivant j'ai traité les fonctions de la forme

$$\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}},$$

$\mathfrak{F}(x^p)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x^p, γ le nombre entier que contient $\frac{s-1}{\gamma}$, r et p des nombres entiers et s un nombre entier quelconque moindre que rp. J'ai développé des règles pour la sommation de ces fonctions, analogues à celles que l'illustre *Abel* a données pour les fonctions dites Abeliennes dans le mémoire XVme du 1er tome de ses oeuvres complètes *). Ensuite j'ai cherché toutes les réductions qu'on peut obtenir pour ces fonctions par des fonctions algébriques et logarithmiques. Cette dernière partie du mémoire suivant, savoir les chapitres 3me, 4me, 5me et 6me, est analogue au mémoire XIV du second tome des oeuvres complètes d'*Abel* sur les fonctions elliptiques. J'ai trouvé par là toutes les fonctions de la forme susdite qui sont intégrables par des fonctions algébriques et logarithmiques. Il est à remarquer que toutes les fonctions de la forme $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}}dx$ qui sont intégrables par des fonctions algébriques et logarithmiques, sont au fond les mêmes que celles sur lesquelles on démontre dans le chapitre 1re et 2de qu'une somme d'un nombre quelconque de ces fonctions est égale à une expression algébrique et logarithmique. Elles sont au reste déja connues.

La méthode dont j'ai fait usage pour opérer la réduction des fonctions données et de trouver, si cela est possible, l'expression algébrique et logarithmique dont la différentielle est égale à la différentielle donnée, est, à ce qu'il me semble, la seule scientifique qu'on doive employer dans le calcul intégral. Étant applicable à plusieurs autres fonctions, elle doit con-

---

*) Dans un autre mémoire inséré dans ce journal tome XX page 178, j'ai développé des théorèmes pour la sommation de ces mêmes fonctions dans le cas où $p=1$ et $s=1$. Parceque $(R(x^p))^s$ est une fonction entière de x dans laquelle les coëfficiens de x^{ep+1}, x^{ep+2}, ... x^{ep+p-1} sont égaux à zéro, et où seulement $\frac{1}{s}$ du nombre des coëfficiens sont indépendants, mais où les autres en dépendent d'une certaine manière, on pourra du mémoire cité, en soumettant les coëfficients de x dans la fonction $R(x)$ à ces conditions, déduire tous les théorèmes sur la sommation des fonctions en question que j'ai développé dans ce mémoire, mais ce sera, p et s étant des quantités indéterminées, un travail bien pénible. Au contraire du mémoire présent on déduit facilement les théorèmes du mémoire tome XX, en supposant seulement $s=1$, $p=1$, $r=n$.

duire à des résultats plus distincts et plus généraux que ceux qu'on connait à présent. Elle mérite par cela l'attention des géomètres. J'ai cherché à lui donner une rigueur parfaite.

Chapitre 1.

De la sommation des fonctions de la forme $\int \frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$.

Théorème 1. Soient $n = rp$, n, r, p et s des nombres entiers positifs, s moindre que n, γ le nombre entier que contient la fraction $\frac{s-1}{p}$, $F(x^p)$ et $R(x^p)$ des fonctions entières de x^p, et

$$1.\quad \Pi(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{(x^p-\alpha^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.$$

Soient de plus $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ des fonctions entières de x, dont les coëfficiens sont des variables indépendantes, et d'une telle forme que, si l'on désigne par t un nombre entier quelconque moindre que r, et par q et m des nombres entiers quelconques moindre que p, on a:

$$2.\quad \begin{cases} f_{n+m-tp}\;(x) = x^{p-1}\;(a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+\dots.) \\ f_{n+m-tp+q}(x) = x^{p-q-1}(b_0+b_1x^p+b_2x^{2p}+\dots.) \\ f_{n+m-tp-q}(x) = x^{q-1}\;(c_0+c_1x^p+c_2x^{2p}+\dots.). \end{cases}$$

Si l'on désigne de plus par c_1, c_2, ... c_n les valeurs diverses de $\surd((1))^{\frac{1}{n}}$, et qu'on suppose

$$3.\quad B_\nu(x) = c_\nu^{n-1}f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}}+c_\nu^{n-2}f_{n-2}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-2}}+\dots.$$
$$\dots.c_\nu f_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+f_0(x)$$

$$4.\quad \psi(x) = B_1(x).B_2(x).B_3(x)\dots.B_n(x),$$

$\psi(x)$ deviendra une fonction entière de x^p. En la décomposant en facteurs de la forme $(x^p-x_\nu^p)$, on obtiendra:

$$5.\quad \psi(x) = A(x^p-x_1^p)(x^p-x_2^p)\dots.(x_2^p-x_\mu^p).$$

Or en supposant

$$6.\quad \vartheta(x) = \frac{\sum_1^n{}_\nu \frac{1}{c_\nu^s}\log B_\nu(x)}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},$$

et en désignant par $\varpi(x)$ le coëfficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement d'une

$$18.\quad C_{-1}(x)=\frac{C_{n-1}(x)}{R(x^p)},\quad C_{-2}(x)=\frac{C_{n-2}(x)}{R(x^p)},\quad\ldots\quad C_{1-n}(x)=\frac{C_1(x)}{R(x^p)}$$

sont des fonctions entières de x; car tous les termes de $\psi(x)$, excepté $(f_0(x))^n$, ont $R(x^p)$ pour facteur, et par conséquent toutes les fonctions $C_1(x)$, $C_2(x)$, …. $C_{n-1}(x)$ sont divisibles par $R(x^p)$. On obtient donc, en faisant pour abréger:

$$19.\quad \lambda(x)=x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\sum_{0}^{n-1}{}_k\, C_{k-s}(x)\,\delta f_k(x),$$

où $\lambda(x)$ est une fonction entière de x:

$$20.\quad \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_x^s(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}=-\frac{\lambda(x)}{(x^p-a^p)\psi'(x)},$$

et de la, en désignant par $\Sigma X(x)$ la quantité $X(x_1)+X(x_2)+\ldots.X(x_\mu)$:

$$21.\quad \Sigma\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_x^s(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}=-\Sigma\frac{\lambda(x)}{(x^p-a^p)\psi'(x))}.$$

Maintenant si $f_k(x)$ est de la forme $x^v(a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+\ldots.)$, $f_{k-s}x$ sera en vertu des équations (1.) de la forme $x^{v+s-\varrho p}(b_0+b_1x^p+b_2x^{2p}+\ldots.)$, ϱ désignant le nombre entier que contient $\frac{v+s}{p}$. Chaque terme de $\delta f_{k-s}x$ doit donc être de la forme $x^{v+s+kp}\delta b$, k étant un nombre entier égal à $-\varrho$ ou plus grand que $-\varrho$. Mais $C_{k-s}(x)\,\delta f_{k-s}(x)$, étant la différentielle de $\psi(x)$ par rapport aux coëfficiens variables de $f_{k-s}(x)$, est une fonction entière de x^p, donc $C_{k-s}(x)$ doit être de la forme $x^{hp-v-s}(c_0+c_1x^p+\ldots.)$, h désignant le nombre entier égal à $\frac{v+s}{p}$ ou plus grand que $\frac{v+s}{p}$. Donc enfin en vertu de l'équation (19.) $\lambda(x)$ sera de la forme $x^{p-1}(d_0+d_1x^p+d_2x^{2p}+\ldots.)$ $=x^{p-1}\varrho(x^p)$, où $\varrho(x^p)$ désigne une fonction entière de x^p. En substituant cette valeur de $\lambda(x)$ dans l'équation (21.), on obtiendra:

$$22.\quad \Sigma\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_x^s(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}=-\Sigma\frac{x^{p-1}\varrho(x^p)}{(x^p-a^p)\psi'(x)}.$$

Si maintenant on fait $\varrho(x^p)=\varrho_1(x^p-a^p)+\varrho(a^p)$, où $\varrho_1(x^p)=\frac{\varrho(x^p)-\varrho(a^p)}{x^p-a^p}$ est une fonction entière de x^p, l'équation (22.) déviendra:

$$23.\quad \Sigma\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_x^s(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}=-\Sigma\frac{x^{p-1}\varrho_1(x^p)}{\psi'(x)}-\varrho(a^p)\Sigma\frac{x^{p-1}}{(x^p-a^p)\psi'(x)}.$$

Mais en décomposant $\frac{1}{\psi(a)}=\frac{1}{A(a^p-x_1^p)(a^p-x_2^p)\dots(a^p-x_\mu^p)}$ en fractions partielles, on trouvera:

$$24.\quad \frac{1}{\psi(a)}=\Sigma\frac{px^{p-1}}{(a^p-x^p)\psi'(x)}$$

et de là:

$$25.\quad \Sigma\frac{x^{p-1}}{(x^p-a^p)\psi'(x)}=-\frac{1}{p\psi(a)}.$$

De plus $\Sigma\frac{x^{kp-1}}{\psi'(x)}$ est le coëfficient de $\frac{1}{a^{kp}}$ dans le développement de $\Sigma\frac{x^{p-1}}{(x^p-a^p)\psi'(x)}$, ou, ce qui est la même chose, de $\frac{1}{a}$ dans le développement de $\frac{a^{kp-1}}{p\psi(a)}$. Donc:

$$26.\quad \Sigma\frac{x^{p-1}\varrho_1(x^p)}{\psi'(x)}=\varpi\left(\frac{x^{p-1}\varrho_1(x^p)}{p\psi(x)}\right)=\frac{1}{p}\varpi\left(\frac{\lambda(x)}{(x^p-a^p)\psi(x)}\right),$$

en remarquant que $\varpi\left(\frac{x^{p-1}\varrho(a^p)}{(x^p-a^p)\psi(x)}\right)$ est égal à zéro. En substituant dans l'équation (23.) et intégrant on obtiendra donc:

$$27.\quad \frac{1}{c_1^s}\Pi(x_1)+\frac{1}{c_2^s}\Pi(x_2)+\dots\frac{1}{c_\mu^s}\Pi(x_\mu)$$
$$=C+\frac{1}{pa^{p-1}}\int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)}-\frac{1}{p}\varpi\int\frac{\lambda(x)}{(x^p-a^p)\psi(x)}.$$

Mais on a en vertu de l'équation (19.):

$$28.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)}=a^{s-\gamma p-1}F(a^p)\sum_0^{n-1}{}_k\int\frac{C_{k-s}(a)\,\delta f_k(a)}{\psi(a)}$$

et, en substituant la valeur de $C_{k-s}(a)$ tirée de l'équation (13.):

$$29.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)}=a^{s-\gamma p-1}F(a^p)\sum_0^{n-1}{}_k\int\left(\sum_1^n{}_\nu\frac{c_\nu^k\sqrt[n]{(R(a^p))^k}\,\delta f_k(a)}{c_\nu^s\sqrt[n]{(R(a^p))^s}B_\nu(a)}\right)$$
$$=\frac{a^{s-\gamma p-1}F(a^p)}{\sqrt[n]{(R(a^p))^s}}\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{c_\nu^s}\int\left(\frac{\sum_0^{n-1}{}_k c_\nu^k\sqrt[n]{(R(a^p))^k}\,\delta f_k(a)}{B_\nu(a)}\right)\right)$$
$$=\frac{a^{s-\gamma p-1}F(a^p)}{\sqrt[n]{(R(a^p))^s}}\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{c_\nu^s}\log B_\nu(a)\right)$$
$$=a^{s-\gamma p-1}F(a^p)\vartheta(a).$$

En substituant donc et remarquant que $\frac{1}{c_\nu^s}$ est aussi bien une valeur de $((1))^{\frac{1}{n}}$

que ϱ_r, on aura:

$$30.\quad c_1\Pi(x_1)+c_2\Pi(x_2)+\dots c_\mu\Pi(x_\mu)$$
$$= C+\frac{F(a^p)\vartheta(a)}{p\,a^{(\gamma+1)p-\varrho}}-\frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{\varrho-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)}{x^p-a^p}\right).$$

Les valeurs de c_1, c_2, c_3, ... c_μ dans le premier membre de cette équation seront déterminées par les équations:

$$31.\quad \begin{cases} c_1 C_k(x_1) = C_{k-s}(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s} \\ c_2 C_k(x_2) = C_{k-s}(x_2)\sqrt[n]{(R(x_2^p))^s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_\mu C_k(x_\mu) = C_{k-s}(x_\mu)\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^s} \end{cases}$$

que l'on obtient de l'équation (16.), en posant c_x au lieu de $\frac{1}{c'_x}$.

En supposant plusieurs des quantités x_1, x_2, x_3, ... x_μ égales entre elles, par exemple $x_1 = x_2$, on aura en vertu des équations (31.):

$$32.\quad c_1 C_k(x_1) = C_{k-s}(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s} = c_2 C_k(x_1),$$

et cela donne, en supposant que $C_k(x)$ et $\sqrt[n]{(R(x^p))^s}C_{k-s}(x)$, ou, ce qui est le même, $C_k(x)$ et $R(x^p)C_{k-s}(x)$ n'ont pas $(x^p-x_1^p)$ pour diviseur commun:

$$c_1 = c_2.$$

On aura donc le théorème suivant.

Théorème 2. Si l'on a l'équation:

$$33.\quad \psi(x) = A(x^p-x_1^p)^{m_1}(x^p-x_2^p)^{m_2}\dots(x^p-x_\mu^p)^{m_\mu}$$

où les fonctions $C_k(x)$ et $C_{k-s}(x)R(x^p)$ n'ont pas de diviseur commun, on aura:

$$34.\quad c_1 m_1\Pi(x_1)+c_2 m_2\Pi(x_2)+\dots c_\mu m_\mu\Pi(x_\mu)$$
$$= C+\frac{F(a^p)\vartheta(a)}{p\,a^{(\gamma+1)p-\varrho}}-\frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{\varrho-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)}{x^p-a^p}\right).$$

Si l'on suppose $F(x^p)$ divisible par (x^p-a^p), $F(a^p)$ dévient égal à zéro. On aura donc, en mettant $(x^p-a^p)F(x^p)$ au lieu de $F(x^p)$, le théorème suivant.

Théorème 3. Le même étant supposé comme dans le théorème 2, si l'on fait

$$35.\quad \Pi(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

on aura:

$$36.\quad c_1 m_1 \Pi(x_1) + c_2 m_2 \Pi(x_2) + \dots c_\mu m_\mu \Pi(x_\mu)$$
$$= C - \frac{1}{p}\varpi(x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)).$$

Si dans la formule (34.) on suppose que le degré de $F(x^p)$ augmenté de $s-\gamma p-1$ soit moindre que celui de $\sqrt[n]{(R(x^p))^s}$ augmenté de $p-1$, on aura:

$$\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)}{x^p-a^p}\right) = 0$$

parceque le degré du dénominateur surpassera celui du nominateur de plus de 1. On aura donc le théorème que voici.

Théorème 4. Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème 2, si le degré de $(F(x^p))^n$ augmenté de ns est moindre que celui de $(R(x^p))^s$ augmenté de $np(\gamma+1)$, on aura:

$$37.\quad c_1 m_1 \Pi(x_1) + c_2 m_2 \Pi(x_2) + \dots c_\mu m_\mu \Pi(x_\mu) = C + \frac{F(a^p)\vartheta(a)}{p\,a^{(\gamma+1)p-s}}.$$

Si dans le théorème précédent on suppose $F(x^p)$ divisible par x^p-a^p, on aura $F(a^p)=0$, et, en mettant $(x^p-a^p)F(x^p)$ au lieu de $F(x^p)$, on aura le théorème suivant:

Theorème 5. Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème 3, si le degré de $F(x^p)^n$ augmenté de ns est moindre que celui de $(R(x^p))^s$ augmenté de $np\gamma$, on aura:

$$38.\quad c_1 m_1 \Pi(x_1) + c_2 m_2 \Pi(x_2) + \dots c_\mu m_\mu \Pi(x_\mu) = C.$$

En différentiant l'équation (34.) $k-1$ fois de suite par rapport à a, on aura le théorème suivant.

Théorème 6. Si l'on fait

$$39.\quad \Pi(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)^k\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},$$

le reste étant supposé comme que dans le théorème 2, on aura:

$$40.\quad c_1 m_1 \Pi(x_1) + c_2 m_2 \Pi(x_2) + \dots c_\mu m_\mu \Pi(x_\mu)$$
$$= C + \frac{1}{\Gamma k.(p a^{p-1})^{k-1}} \cdot \frac{d^{k-1}\left(\frac{F(a^p)\vartheta(a)}{p\,a^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d a^{k-1}} - \frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)}{(x^p-a^p)^k}\right).$$

Soit $\mathfrak{F}(x^p)$ une fonction rationnelle quelconque de x^p, on peut toujours faire

$$41.\quad \mathfrak{F}(x^p) = F(x^p) + \frac{F_1(x^p)}{(x^p-a_1^p)^{k_1}} + \frac{F_2(x^p)}{(x^p-a_2^p)^{k_2}} + \dots \frac{F_\nu(x^p)}{(x^p-a_\nu^p)^{k_\nu}},$$

où $F(x^p)$, $F_1(x^p)$, ... $F_\nu(x^p)$ désignent des fonctions entières de x^p. On aura donc en vertu des théorèmes 3[me] et 6[me]:

Théorème 7. Si l'on fait:

$$42.\quad \Pi(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},$$

$\mathfrak{F}(x^p)$ etant déterminé par l'équation (41.), on aura:

$$43.\quad c_1 m_1 \Pi(x_1) + c_2 m_2 \Pi(x_2) + \dots c_\mu m_\mu \Pi(x_\mu)$$

$$= C - \frac{1}{p}\varpi\left(x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\vartheta(x)\right) + \frac{1}{\Gamma k_1.(p a_1^{p-1})^{k_1-1}}\cdot\frac{d^{k_1-1}\left(\frac{F_1(a_1^p)\vartheta(a_1)}{p a_1^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d a_1^{k_1-1}}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma k_2.(p a_2^{p-1})^{k_2-1}}\cdot\frac{d^{k_2-1}\left(\frac{F_2(a_2^p)\vartheta(a_2)}{p a_2^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d a_2^{k_2-1}}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{\Gamma k_\nu.(p a_\nu^{p-1})^{k_\nu-1}}\cdot\frac{d^{k_\nu-1}\left(\frac{F_\nu(a_\nu^p)\vartheta(a_\nu)}{p a_\nu^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d a_\nu^{k_\nu-1}}.$$

Nous avons jusqu'ici considéré les coëfficiens des diverses puissances de x dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ comme des variables indépendantes, et les valeurs de x_1, x_2, ... x_μ comme déterminées en fonctions de celles-ci par l'équation (5.). Considérons maintenant un certain nombre q des quantités x_1, x_2, ... x_μ comme indéterminées; les coëfficiens de x dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ seront des fonctions de celles-ci et déterminées par les q des équations (31.). Pour trouver le nombre des coëfficiens $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$, soit le degré de $R(x^p) = mp$, et celui de $f_{n-\varrho}(x) = \beta_\varrho p + \alpha_\varrho$; on trouvera de là, parceque'un des termes de $\psi(x)$ est $(f_{n-\varrho}(x))^n.(R(x^p))^{n-\varrho}$, que la plus petite

valeur de μ est $n\beta_\varrho+r\alpha_\varrho+(n-\varrho)m$. En supposant maintenant dans la dernière des équations (2.):

$$44.\quad \begin{cases} n+m-tp-q = v, \\ m = \alpha_\varrho+1-\varrho+t'p, \\ t-t' = \xi, \end{cases}$$

où t' désigne un nombre entier, on obtiendra:

$$45.\quad f_v(x) = x^{n-\xi p-v-\varrho+\alpha_\varrho}(c_0+c_1x^p+c_2x^{2p}+\ldots.).$$

En donnant dans cette expression à v successivement les valeurs 0, 1, 2, … … $n-1$, et en supposant ξ égal au nombre entier contenu dans $\frac{r-v-\varrho+\alpha_\varrho}{p}$, on obtiendra les diverses formes de $f_0(x)$, $f_1(x)$, …. $f_{n-1}(x)$.

En vertu de l'équation (45.) le degré de $f_v(x)$ doit être de la forme $n-\xi p-v-\varrho+\alpha_\varrho+yp$. Mais dans $\psi(x)$ on doit avoir un terme de la forme $(f_v(x))^n(R(x^p))^v$ dont le degré doit être égal à μp ou moindre que μp. Donc:

$$46.\quad n(n-\xi p-v-\varrho+\alpha_\varrho+yp)+vmp = \text{ou} < (n\beta_\varrho+r\alpha_\varrho+(n-\varrho)m)p$$

et de là:

$$47.\quad y = \text{ou} < \beta_\varrho+\xi+\frac{(m-r)(n-\varrho-v)}{n}.$$

En désignant donc par t_v le nombre entier égal à $\frac{v(m-r)}{n}$ ou immédiatement moindre que $\frac{v(m-r)}{n}$, la plus grande valeur de y doit être: $\beta_\varrho+\xi+t_{n-\varrho-v}$. Le plus haut degré qu'en vertu de cela $f_v(x)$ peut avoir est donc: $n-v-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p+t_{n-\varrho-v}p$. Or je dis que ce degré n'est jamais trop grand. En effet, en considérant les termes qui ont $(R(x^p))^v$ pour facteur, on voit qu'ils seront composés hors $(R(x^p))^v$ de n facteurs de la forme $f_q(x)$, la somme des indices de ces facteurs étant vn. La somme de leurs degrés et du degré de $(R(x^p))^v$ sera donc, en faisant usage de la même désignation comme dans le commencement de la démonstration du théorème 1[er]:

$$48.\quad \Sigma(n-q-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p+pt_{n-\varrho-q})+vmp,$$

en donnant ici à q de valeurs telles que $\Sigma q = vn$. En réduisant elle déviendra donc:

$$49.\quad n^2-\varrho n+\alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn-vn+pvm+p\Sigma t_{n-\varrho-q}.$$

Maintenant la plus grande valeur de $p\Sigma t_{n-\varrho-q}$ est

$$50.\quad p\Sigma\frac{(n-\varrho-q)(m-r)}{n} = p(n-\varrho-v)(m-r).$$

ubstituant cela dans l'expression (49.), le plus grand haut d'un terme conque de $\psi(x)$ déviendra:

51. $$\alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pnm-p\varrho m=\mu p.$$

x) doit donc être du dégré $n-v-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p+pt_{n-\varrho-v}$.

En désignant maintenant par s_v le nombre entier égal à $\frac{n+\alpha_\varrho-v-\varrho+p}{p}$ ou immédiatement moindre que ce nombre, on voit aisément que le nombre des coëfficiens dans $f_v(x)$ doit être égal à: $\beta_\varrho+t_{n-\varrho-v}+s_v$, et le nombre de tous les coëfficiens dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ égal à:

52. $$n\beta_\varrho+\sum_{0}^{n-1}{}_v(t_{n-\varrho-v}+s_v).$$

Pour trouver la valeur de $\sum_0^{n-1}{}_v(s_v)$ soit:

53. $$n+\alpha_\varrho+p-\varrho=c_\varrho p+d_\varrho,$$

on trouvera:

54. $$\left\{\begin{array}{l} s_0=c_\varrho \\ s_1=c_\varrho \\ \vdots \qquad \vdots \\ s_{d_\varrho}=c_\varrho \\ s_{d_\varrho+1}=c_\varrho-1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ s_{d_\varrho+p}=c_\varrho-1 \\ s_{d_\varrho+p+1}=c_\varrho-2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ s_{d_\varrho+(r-1)p}=c_\varrho-r+1 \\ s_{d_\varrho+(r-1)p+1}=c_\varrho-r \\ \vdots \qquad \vdots \\ s_{d_\varrho+(r-1)p+(p-d_\varrho-1)}=s_{n-1}=c_\varrho-r. \end{array}\right.$$

Donc:

55. $$\sum_0^{n-1}{}_v s_v=rpc_\varrho-p-2p-3p\dots-(r-1)p+rd_\varrho-$$
$$=r(n+\alpha_\varrho-\varrho)-\frac{n(r-1)}{2}+r.$$

De plus on a:

$$56.\quad \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_v}}\, t_{n-\varrho-v} = \overset{n-1}{\underset{n-\varrho+1}{\Sigma_v}}\, t_{n-\varrho-v} + \overset{n-\varrho}{\underset{\varrho}{\Sigma_v}}\, t_{n-\varrho-v}$$

$$= \overset{\varrho-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_{-v} + \overset{n-\varrho}{\underset{0}{\Sigma_v}}\, t_v$$

$$= \overset{\varrho-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_{n-v} - (m-r)(\varrho-1) + \overset{n-\varrho}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v$$

$$= \overset{n-1}{\underset{n-\varrho+1}{\Sigma_v}}\, t_v \quad - (m-r)(\varrho-1) + \overset{n-\varrho}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v$$

$$= \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v \quad - (m-r)(\varrho-1).$$

En substituant maintenant les valeurs de $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_v}}\, s_v$ et de $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_v}}\, t_{n-\varrho-v}$ dans l'expression (52.) on obtiendra la valeur suivante du nombre des coëfficiens:

$$57.\quad n\beta_\varrho + r(n+\alpha_\varrho-\varrho) - \frac{n(r-1)}{2} + r - (m-r)(\varrho-1) + \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v$$

$$= n\beta_\varrho + \alpha_\varrho r - m\varrho + m + \frac{n(r+1)}{2} + \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v.$$

En remarquant qu'en vertu de la forme des équations (31.) un des coëfficiens doit être indépendant, il restera à déterminer par les μ équations (31.):

$$58.\quad n\beta_\varrho + \alpha_\varrho r - m\varrho + m - 1 + \frac{n(r-1)}{2} + \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v$$

coëfficiens. Mais en rétranchant ce nombre de μ, on obtiendra le nombre ν des quantités $x_1, x_2, \ldots\, x_\mu$ qui seront déterminées par ces mêmes équations (31.). On doit donc avoir:

$$59.\quad \nu = mn - m + 1 - \frac{n(r+1)}{2} - \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v.$$

Pour trouver $\overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_v}}\, t_v$ soit:

$$60.\quad m-r = db,\quad n = cb,$$

c et d étant des nombres premiers entre eux. Le nombre entier égal à $\frac{v(m-r)}{n}$ ou immédiatement moindre que ce nombre sera t_v et le nombre entier égal à $\frac{(n-v)(m-r)}{n}$ ou immédiatement moindre que ce nombre sera $m-r-t_v-1$ si $v(m-r)$ n'est pas divisible par n, ou $= m-r-t_v$ si

fonction z de x suivant les puissances descendantes de x *), je dis que:

$$7.\quad c_1\Pi(x_1)+c_2\Pi(x_2)+c_3\Pi(x_3)+\ldots+c_\mu\Pi(x_\mu)$$
$$=C+\frac{F(a^p)\,\vartheta(a)}{p\,a^{(\gamma+1)p-s}}-\frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta(x)}{x^p-a^p}\right).$$

Toutes les valeurs de c_1, c_2, c_3, ... c_n dans l'expression de la fonction $\psi(x)$ doivent être différentes entre elles, tandis que les quantités c_1, c_2, c_3, ... c_μ dans le premier membre de l'équation (7.) sont déterminées par des équations particulières que nous présenterons plus bas.

Démonstration. $\psi(x)$ étant une fonction entière symmétrique des racines de l'équation $=0$, $y^n-R(x^p)$ est une fonction entière des coëfficiens de cette équation. En multipliant donc les fonctions $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... $B_n(x)$, on n'aura que les termes dont la somme des exposans est un multiple de n. Les indices des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ dans l'expression de $B_\nu(x)$ étant dans chaque terme les mêmes que les exposans de $\sqrt[n]{(R(x^p))}$, la somme de ces indices dans chaque terme de $\psi(x)$ doit être un multiple de n. En désignant un quelconque de ces indices par $n-z$, et la somme des indices dans un terme quelconque de $\psi(x)$ par $\Sigma(n-z)$, on aura, parceque le nombre des facteurs de la forme $f_\nu(x)$ dans chaque terme de $\psi(x)$ est n et que par conséquent, si b désigne un nombre constant, $\Sigma(b)=nb$:

$$8.\quad \Sigma(n-z)=n^2-\Sigma(z)=gn,$$

où g désigne un nombre entier. Donc:

$$9.\quad \Sigma(z)=n^2-gn.$$

Mais si l'on désigne par $\Sigma(e)$ la somme des exposans de x dans chaque terme de $\psi(x)$ et qu'on remarque qu'on obtient l'exposant d'un terme quelconque du second membre des équations (2.) en retranchant l'indice du premier membre de $hp+m-1$, h étant un nombre entier, on voit que

$$\Sigma(e)=\Sigma(hp+m-1-n+z)=\Sigma(z)+n(m-1)-n^2+p\Sigma h.$$

Donc en substituant la valeur de $\Sigma(z)$ tirée de l'équation (9.) on obtiendra:

$$10.\quad \Sigma(e)=n(m-1)-gn+p\Sigma h.$$

*) La fonction que j'ai désignée par ϖ peut aussi, suivant une rémarque de Mr. *Cauchy*, être mis sous la forme d'un résidu. En effet on a:

$$\varpi(f(x))=E\,\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{((x^2))},$$

E étant le signe du résidu.

Le second membre de cette équation étant divisible par p, $\Sigma(e)$, l'est aussi; donc $\psi(x)$ est une fonction entière de x^p.

En désignant maintenant par x une quelconque des quantités x_1, x_2, x_3, ... x_μ, par $\psi'(x)$ la dérivée de $\psi(x)$ par rapport à x, et par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes, on aura:

$$11. \quad \psi(x) = 0,$$

$$12. \quad dx\,\psi'(x) = -\sum_0^{n-1}{}_k \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\psi(x)\,c_\nu^k \sqrt[n]{(R(x^p))^k}\,\delta f_k(x)}{B_\nu(x)}\right),$$

ou en supposant pour abréger,

$$13. \quad \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\psi(x)\,c_\nu^k \sqrt[n]{(R(x^p))^k}}{B_\nu(x)}\right) = C_k(x):$$

$$14. \quad dx\,\psi'(x) = -\sum_0^{n-1}{}_k C_k(x)\,\delta f_k(x).$$

De là on trouve en multipliant par $\dfrac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)}{c_\varkappa^s (x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\,\psi'(x)}$:

$$15. \quad \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_\varkappa^s (x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} = -\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)}{(x^p-a^p)\,\psi'(x)}\cdot\sum_0^{n-1}{}_k \frac{C_k(x)\,\delta f_k(x)}{c_\varkappa^s \sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.$$

Mais on voit de l'équation (13.) et en remarquant qu'en vertu de l'équation (11.) une des fonctions $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... $B_n(x)$, par exemple $B_\varkappa(x)$ doit être égale à zéro, que:

$$16. \quad \frac{C_k(x)}{c_\varkappa^\varrho \sqrt[n]{(R(x^p))^\varrho}} = C_{k-\varrho}(x).$$

En substituant dans l'équation (15.), on obtiendra donc:

$$17. \quad \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{c_\varkappa^s (x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} = -\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)}{(x^p-a^p)\,\psi'(x)}\sum_0^{n-1}{}_k C_{k-s}(x)\,\delta f_k(x).$$

Maintenant $C_{n-1}(x)$, $C_{n-2}(x)$, ... $C_0(x)$ sont des fonctions entières de x, parcequ'elles sont les coëfficiens différentielles qui proviennent de la différentiation de la fonction $\psi(x)$ par rapport aux quantités $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, ... $f_0(x)$. De plus, en supposant dans l'équation (16.): $\varrho = n$, et successivement $k = n-1$, $k = n-2$, ... $k = 1$, on voit que:

seront des racines d'une équation algébrique du degré $\frac{m(rp-1)-r-b+2}{2}$, et à une expression algébrique et logarithmique *).

Si ν dévient égal à zéro ou moindre que zéro, la fonction $\Pi(x)$ est intégrable. Dans ce cas on doit donc avoir:

$$69.\quad m(rp-1)-r-b+2 = \text{ ou } < 0.$$

Pour trouver toutes les valeurs possibles de r, m, p dans cette équation, considérons séparement les cas où $m > r$, $m = r$ et $m < r$. Soit $m > r$, on aura ou $m-r > n$, ou $m-r =$ ou $< n$. Si $m-r > n$, on aura $b =$ ou $< n$, $r+b =$ ou $< r+n$, $m(n-1) > (n-1)(n+r)$ et parcequ'on doit avoir $n > 1$, $(n-1)(n+r) =$ ou $> r+n$; donc $r+b < m(n-1)$ et

$$m(n-1)-r-b > 0.$$

Si $m-r =$ ou $< n$, on aura $b =$ ou $< m-r$, $r+b =$ ou $< m$, et parceque $n > 1$:

$$m(n-1)-r-b = \text{ ou } > 0.$$

Donc si $m > r$ il est impossible que $\nu =$ ou < 0. Soit donc $m = r$. On obtiendra de l'équation (69.) en remarquant que dans ce cas $b = n$:

$$70.\quad r(n-2) = \text{ ou } < n-2.$$

Maintenant ou $n = 2$, ou $n > 2$. Si $n = 2$, on aura: ou $r = 1$, $p = 2$, $m = 1$, ou $r = 2$, $p = 1$, $m = 2$, et on aura donc:

$$71.\quad m(n-1)-r-b+2 = 0.$$

L'intégral (68.) dévient donc dans ces cas:

$$72.\quad \int\frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt{(a_0+a_1x+a_2x^2)}}.$$

Si $n > 2$, on tirera de l'équation (70.): $r =$ ou < 1. Donc $r = 1$, $m = 1$, $p = n$ et

$$73.\quad m(n-1)-r-b-2 = 0.$$

L'intégral (68.) dévient donc:

$$74.\quad \int\frac{x^{s-1}\,\mathfrak{F}(x^n)\,dx}{\sqrt[n]{(1+k^nx^n)^s}}.$$

Soit maintenant $m < r$, on aura $mp = 1$, ou $mp > 1$. Si $mp = 1$, on aura: $m = 1$, $p = 1$, $r = n$, $b = 1$, et

$$75.\quad m(n-1)-r-b+2 = 0.$$

L'intégral (68.) dévient donc:

$$76.\quad \int\frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt[n]{(1+bx)^s}}.$$

*) Voyez la note à la fin du mémoire

Si $mp > 1$, on aura: $mn =$ ou $> 2r$, $m(n-1) =$ ou $> 2r-m$, $b =$ ou $< r-m$ et par conséquent $m(n-1) > r+b$, et

$$m(n-1)-r-b > 0.$$

Dans ce cas il est donc impossible que $\nu =$ ou < 0. Les seules fonctions de la forme (68.) qui sont intégrables par le théorème 8[me] tant qu'on laisse indéterminés les coëfficiens de x dans les fonctions $\mathfrak{F}(x^p)$ et $R(x^p)$, sont donc les fonctions (72, 74 et 76.). Ces intégrales sont au reste déja connues. Pour donner une exemple de l'application du théorème 8[me] je vais chercher l'intégrale (74.). Pour cela on peut supposer:

$$77. \quad \begin{cases} f_{n-1}(x) = a_{n-1} \\ f_{n-2}(x) = a_{n-2}x \\ f_{n-3}(x) = a_{n-3}x^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_1(x) = a_1 x^{n-2} \\ f_0(x) = x^{n-1}. \end{cases}$$

Les équations (5 et 6.) déviennent dans ce cas:

$$78. \quad \psi(x) = A(x^n - x_1^n)(x^n - h^n)^{n-2},$$

$$79. \quad \vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+k^n x^n)^s}} \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{c_\nu^s} \log \sum_0^{n-1}{}_q \left[c_\nu^q a_q x^{n-q-1} \sqrt[n]{(1+k^n x^n)^q}\right]\right),$$

h étant un nombre constant, et on obtiendra de l'équation (48.). en supposant $\mathfrak{F}(x^n)$ déterminé par l'équation (41.), n étant posé au lieu de p:

$$80. \quad \int \frac{x^{s-1}\mathfrak{F}(x^n)\,dx}{\sqrt[n]{(1+k^n x^n)^s}}$$

$$= C - \frac{1}{ns}\varpi(x^{s-1}\mathfrak{F}(x^n)\vartheta(x)) + \frac{1}{c.\Gamma k_1}\cdot\frac{d^{k_1-1}\left(\frac{F_1(a_1^n)\vartheta(a_1)}{n a_1^{n-s}}\right)}{d(a_1^n)^{k_1-1}}$$

$$+ \frac{1}{c.\Gamma k_2}\cdot\frac{d^{k_2-1}\left(\frac{F_2(a_2^n)\vartheta(a_2)}{n a_2^{n-s}}\right)}{d(a_2^n)^{k_2-1}}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{c\,\Gamma k_\nu}\cdot\frac{d^{k_\nu-1}\left(\frac{F_\nu(a_\nu^n)\vartheta(a_\nu)}{n a_\nu^{n-s}}\right)}{d(a_\nu^n)^{k_\nu-1}}$$

Si l'on suppose $\mathfrak{F}(x^n) = 1$, on aura en vertu de l'équation (36.) et en de-

veloppant la valeur de $\varpi(x^{s-1}\vartheta(x))$:

81. $$\int\frac{x^{s-1}dx}{\sqrt[n]{(1+k^n x^n)^s}} = C-\frac{1}{n.c.k^s}\sum_1^n{}_\nu\left[\frac{1}{c_\nu^s}\log\sum_1^{n-1}{}_q(c_\nu^q a_q k^q)\right].$$

La quantité c est déterminée par l'équation:

$$c=\frac{\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^{k-s}}{B_\nu(x)}\right)}{\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^k}{B_\nu(x)}\right)}.$$

qu'on tire des équations (31.).

Pour déterminer les $\mu-\nu$ coëfficiens de x dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_n(x)$, on peut employer les équations (31.); mais, il vaut mieux employer les formules suivantes:

82. $$B(x_1)=0,\quad B(x_2)=0,\quad \ldots\ldots\ldots\quad B(x_{\mu-\nu})=0,$$

ou x_1, x_2, ... $x_{\mu-\nu}$ sont les $\mu-\nu$ indéterminées parmi les quantités x_1, x_2, ... x_μ. Si plusieurs de ces quantités sont égales entre elles p. e. $x_1=x_2\ldots=x_k$, on aura les équations:

83. $$B(x_1)=0,\quad \frac{dB(x_1)}{dx_1}=0,\quad \frac{d^2B(x_1)}{dx_1^2}=0,\quad \ldots\quad \frac{d^{k-1}B(x_1)}{dx_1^{k-1}}=0,$$

au lieu des k premiers des équations (82.). En employant ces équations dans l'exemple précédent et faisant pour abréger:

84. $$\left\{\begin{array}{lll}
 & \alpha_0=x_1^{n-2}.\sqrt[n]{(1+k^n x_1^n)}, & \beta_0=x_1^{n-3}.\sqrt[n]{(1+k^n x_1^n)^2},\ \ldots\\
\lambda_0=-x_1^{n-1}, & \alpha_1=k^{n-2}.\sqrt[n]{(1+k^n k^n)}, & \beta_1=k^{n-3}.\sqrt[n]{(1+k^n k^n)^2},\ \ldots\\
\lambda_1=-k^{n-1}, & \alpha_2=\frac{d\alpha_1}{dk}, & \beta_2=\frac{d\beta_1}{dk},\ \ldots\ldots\\
\lambda_2=-(n-1)k^{n-2}, & \alpha_3=\frac{d^2\alpha_1}{dk^2}, & \beta_3=\frac{d^2\beta_1}{dk^2},\ \ldots\ldots\\
\lambda_3=-(n-1)(n-2)k^{n-3}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
\ldots\ldots & \alpha_{n-2}=\frac{d^{n-3}\alpha_1}{dk^{n-3}}, & \beta_{n-2}=\frac{d^{n-3}\beta_1}{dk^{n-3}},\ \ldots\ldots\\
\lambda_{n-2}=-\frac{\Gamma(n-1).k^2}{2}, & \varkappa_0=\sqrt[n]{(1+k^n x_1^n)^{n-1}}, & \\
\varepsilon_0=x_1\sqrt[n]{(1+k^n k^n)^{n-2}}, & \varkappa_1=\sqrt[n]{(1+k^n k^n)^{n-1}}, & \\
\varepsilon_1=k\sqrt[n]{(1+k^n k^n)^{n-2}}, & \varkappa_2=\frac{d\varkappa_1}{dk}, & \\
\varepsilon_2=\frac{d\varepsilon_1}{dk}, & \varkappa_3=\frac{d^2\varkappa_1}{dk^2}, & \\
\varepsilon_3=\frac{d^2\varepsilon_1}{dk^2}, & \ldots\ldots & \\
\ldots\ldots & \varkappa_{n-2}=\frac{d^{n-3}\varkappa_1}{dk^{n-3}}, & \\
\varepsilon_{n-2}=\frac{d^{n-3}\varepsilon_1}{dk^{n-3}}, & &
\end{array}\right.$$

on obtiendra les équations suivantes:

$$85.\quad\begin{cases}\alpha_0 a_1+\beta_0 a_2+\gamma_0 a_3+\ldots\ \varepsilon_0 a_{r-2}+\varkappa_0 a_{n-1}=\lambda_0\\ \alpha_1 a_1+\beta_1 a_2+\gamma_1 a_3+\ldots\ \varepsilon_1 a_{n-2}+\varkappa_1 a_{n-1}=\lambda_1\\ \alpha_2 a_1+\beta_2 a_2+\gamma_2 a_3+\ldots\ \varepsilon_2 a_{n-2}+\varkappa_2 a_{n-1}=\lambda_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-2} a_1+\beta_{n-2}a_2+\gamma_{n-2}a_3+\ldots\ \varepsilon_{n-2}a_{n-2}+\varkappa_{n-2}a_{n-1}=\lambda_{n-2}.\end{cases}$$

De là on trouvera les expressions suivantes symboliques des quantités a_1, a_2, ... a_{n-1}, dans lesquelles on doit développer toutes les parentheses et remplacer les exposans par des indices *):

$$a_1=\frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\gamma-\beta)\ldots(\varkappa-\lambda)(\varkappa-\beta)(\varkappa-\gamma)\ldots(\varkappa-\varepsilon)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\beta)(\varkappa-\gamma)\ldots(\varkappa-\varepsilon)},$$

$$a_2=\frac{(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)(\gamma-\alpha)\ldots(\varkappa-\lambda)(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\gamma)\ldots(\varkappa-\varepsilon)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)\ldots(\varkappa-\beta)(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\gamma)\ldots(\varkappa-\varepsilon)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}=\frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\gamma-\beta)\ldots(\alpha-\lambda)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\varepsilon)}{(\beta-\varkappa)(\gamma-\varkappa)(\gamma-\beta)\ldots(\alpha-\varkappa)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\varepsilon)}.$$

Chapitre 2.

Sur la sommation des fonctions de la forme $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\,dx$.

En mettant ces fonctions sous la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, on aura les théoremes suivants.

Théorème 9. Le même étant supposées que dans le théorème 1er, excepté qu'on ait au lieu des équations (2.) les équations suivantes:

$$86.\quad\begin{cases}f_{n+m-tp}(x)=x^{p-1}(a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+\ldots),\\ f_{n+m-tp+q}(x)=x^{q-1}(b_0+b_1x^p+b_2x^{2p}+\ldots),\\ f_{n+m-tp-q}(x)=x^{p-q-1}(c_0+c_1x^p+c_2x^{2p}+\ldots),\end{cases}$$

et qu'on a:

$$87.\quad P(x)=\int\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},$$

$$88.\quad G'(x)=\frac{\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_\nu\, c_\nu^s\log B_\nu(x)}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},$$

on aura:

$$89.\quad c_1P(x_1)+c_2P(x_2)+\ldots\ c_\mu P(x_\mu)$$
$$=C+\frac{F(a^p)\vartheta'(a)}{p.a^{(\gamma+1)p-s}}-\frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\vartheta'(x)}{x^p-a^p}\right).$$

*) Voyez *Cauchy* Cours d'Analyse pag. 80.

Les valeurs de c_1, c_2, ... c_μ dans le premier membre de cette équation seront déterminées par les équations suivantes:

$$90.\quad\begin{cases} c_1^s\, C_k(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s} = C_{k+s}(x_1) \\ c_2^s\, C_k(x_2)\sqrt[n]{(R(x_2^p))^s} = C_{k+s}(x_2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_\mu^s\, C_k(x_\mu)\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^s} = C_{k+s}(x_\mu) \end{cases}$$

Démonstration. Pour démontrer que $\psi(x)$ dans ce cas devient une fonction entière de x, on peut faire usage de la même méthode que dans la démonstration du théorème 1er. Au lieu de l'équation (10.) on aura dans ce cas:

$$91.\quad \Sigma e = \Sigma(hp+m-1+n-z) = n(m+n-1)+p\Sigma h-\Sigma z,$$

et en substituant la valeur de Σz:

$$92.\quad \Sigma e = gn+n(m-1)+p\Sigma h,$$

expression divisible par p. Donc ψx est une fonction entière de x^p.

En multipliant maintenant l'équation (14.) par $\dfrac{c_z^s x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\,\psi'(x)}$ on trouvera:

$$93.\quad \frac{c_z^s x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}} = -\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)}{(x^p-a^p)\psi'(x)}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{c_z^s\,\delta f_k(x)\,C_k(x)}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}.$$

Mais on trouve de l'équation (16.)

$$94.\quad \frac{c_z^s\, C_k(x)}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}} = C_{k+s-n}.$$

Donc:

$$95.\quad \frac{c_z^s x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}} = -\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)}{(x^p-a^p)\psi'(x)}\sum_0^{n-1}{}_k\,\delta f_k(x)\,C_{k+s-n}(x).$$

On a maintenant

$$96.\quad C_{-1}(x)=\frac{C_{n-1}(x)}{R(x^p)},\quad C_{-2}(x)=\frac{C_{n-2}(x)}{R(x^p)},\quad \ldots\ldots\quad C_{1-n}(x)=\frac{C_1(x)}{R(x^p)}.$$

Donc $\sum_0^{n-1}{}_k\,\delta f_k(x)\,C_{k+s-n}(x)$ est une fonction entière de x. En faisant pour abréger:

$$97.\quad \lambda'(x) = x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\sum_0^{n-1}{}_k\,C_{k+s-n}(x)\,\delta f_k(x),$$

où $\lambda'(x)$ est une fonction entière de x, on obtiendra:

$$98.\quad \frac{c_x^s x^{s-\gamma p-1} F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}} = -\frac{\lambda'(x)}{(x^p-a^p)\,\psi'(x)},$$

et de là:

$$99.\quad \Sigma\frac{c_x^s x^{s-\gamma p-1} F(x^p)\,dx}{(x^p-a^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$= -\Sigma\frac{\lambda'(x)}{(x^p-a^p)\psi'(x)} = \frac{1}{p.a^{p-1}}\cdot\frac{\lambda'(a)}{\psi(a)} - \frac{1}{p}\varpi\left(\frac{\lambda'(x)}{(x^p-a^p)\,\psi(x)}\right).$$

En intégrant maintenant et en remarquant que:

$$100.\quad \int\frac{\lambda'(a)}{\psi(a)} = a^{s-\gamma p-1}F(a^p)\int\frac{C_{k+s-n}\,\delta f_k(a)}{\psi(a)} = \frac{a^{s-\gamma p-1}F(a^p)}{\sqrt[n]{(R(a^p))^{n-s}}}\sum_1^n{}_\nu(c_\nu^s\log B_\nu(a)),$$

on aura:

$$101.\quad c_1P(x_1)+c_2P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu P(x_\mu)$$

$$= C+\frac{F(a^p)\,\vartheta'(a)}{p.a^{(\gamma+1)p-s}} - \frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,\vartheta'(x)}{x^p-a^p}\right).$$

Les cinq théorèmes suivants peuvent facilement être démontrés de la même manière que les théorèmes 2, 3, 4, 5 et 7.

Théorème 10. Si l'on a l'équation (33.) et si les fonctions $C_{\lambda+s}(x)$ et $C_\lambda(x).R(x^p)$ n'ont pas de diviseur commun, on aura:

$$102.\quad c_1m_1P(x_1)+c_2m_2P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu m_\mu P(x_\mu)$$

$$= C+\frac{F(a^p)\,\vartheta'(a)}{p.a^{(\gamma+1)p-s}} - \frac{1}{p}\varpi\left(\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,\vartheta'(x)}{x^p-a^p}\right).$$

Théorème 11. Le même étant supposées que dans le théorème précédent, si l'on fait:

$$103.\quad P(x) = \int\frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},$$

on aura:

$$104.\quad c_1m_1P(x_1)+c_2m_2P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu m_\mu P(x_\mu)$$

$$= C-\frac{1}{p}\varpi(x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,\vartheta'(x)).$$

Théorème 12. Les suppositions étant les mêmes que dans le théorème 10, si le degré de $(F(x^p))^n$ augmenté de ns est moindre que celui de $(R(x^p))^{n-s}$ augmenté de $np(\gamma+1)$, on aura:

$$105.\quad c_1m_1P(x_1)+c_2m_2P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu m_\mu P(x_\mu) = C+\frac{F(a^p)\,\vartheta'(a)}{p.a^{(\gamma+1)p-s}}.$$

Théorème 13. Le même étant supposées que dans le théorème 11., si le degré de $(F(x^p))^n$ augmenté de ns est moindre que celui de $(R(x^p))^{n-s}$ augmenté de $np\gamma$, on aura:

$$105'.\quad c_1 m_1 P(x_1)+c_2 m_2 P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu m_\mu P(x_\mu) = C.$$

Théorème 14. Si l'on fait:

$$106.\quad P(x)=\int\frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x))^{n-s}}},$$

$\mathfrak{F}(x^p)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x^p développée en fractions partielles par l'équation (41.), on aura:

$$107.\quad c_1 m_1 P(x_1)+c_2 m_2 P(x_2)+\ldots\ldots c_\mu m_\mu P(x_\mu)$$

$$=C-\frac{1}{p}\varpi\left(x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\vartheta'(x)\right)+\frac{1}{\Gamma k_1}\cdot\frac{d^{k_1-1}\left(\dfrac{F_1(a_1^p)\vartheta'(a_1)}{p.a_1^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d(a_1^p)^{k_1-1}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{\Gamma k_\nu}\cdot\frac{d^{k_\nu-1}\left(\dfrac{F_\nu(a_\nu^p)\vartheta'(a_\nu)}{p.a_\nu^{(\gamma+1)p-s}}\right)}{d(a_\nu^p)^{k_\nu-1}}.$$

Pour trouver le nombre des coëfficiens de x dans les fonctions $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, ... $f_1(x)$, $f_0(x)$, soit le degré de $R(x^p)$ égal à pm et celui de $f_{n-\varrho}(x)$ à $\beta_\varrho p+\alpha_\varrho$; parcequ'un des termes de $\psi(x)$ est $(f_{n-\varrho}(x))^n(R(x^p))^{n-\varrho}$, la plus petite valeur de μ sera $n\beta_\varrho+r\alpha_\varrho+(n-\varrho)m$. En supposant maintenant dans la seconde des équations (86.):

$$108.\quad\begin{cases}n+m-tp+q=v,\\ m=t_1 p-\varrho-\alpha_\varrho-1,\\ t-t_1=\xi',\end{cases}$$

où t_1 désigne un nombre entier, on obtiendra:

$$109.\quad f_v(x)=x^{v+\varrho+\alpha_\varrho+\xi'p-n}(b_0+b_1x^p+b_2x^{2p}+\ldots).$$

En donnant dans cette expression à v successivement les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$, et en supposant ξ' égal à la différence entre r et le nombre entier contenu dans $\frac{\varrho+v+\alpha_\varrho}{p}$ on obtiendra les formes de toutes les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$.

Le degré de $f_v(x)$ doit donc être de la forme $v+\varrho+\alpha_\varrho p+\xi' p-n+yp$. Mais dans $\psi(x)$ il faut se trouver un terme de la forme $(f_v(x))^n(R(x^p))^v$, dont le degré doit être égal à μp ou moindre que μp. Donc:

110. $n(v+\varrho+\alpha_\varrho+\xi' p-n+yp)+vmp =$ ou $<(n\beta_\varrho+r\alpha_\varrho+(n-\varrho)m)p$,

et de là:

$$111. \quad y = \text{ ou } < \beta_\varrho-\xi'+\frac{(m+r)(n-\varrho-v)}{n}.$$

En désignant maintenant par q_v le nombre entier égal à $\frac{v(m+r)}{n}$ ou immédiatement moindre que cette fraction, la plus grande valeur de y doit être $=\beta_\varrho-\xi'+q_{n-\varrho-v}$. Le plus haut degré que $f_v(x)$ peut avoir est donc $v+\varrho+\alpha_\varrho-n+\beta_\varrho p+pq_{n-\varrho-v}$. Or ce degré n'est jamais trop grand. En effet le degré d'un quelconque des termes de $\psi(x)$ qui ont $(R(x^p))^v$ pour facteur, doit être

$$112. \quad \Sigma(u+\varrho+\alpha_\varrho-n+\beta_\varrho p+q_{n-\varrho-u}p)+vmp,$$

en donnant ici à u de valeurs telles que $\Sigma u = vn$. En réduisant il déviendra donc:

$$113. \quad vn+n\varrho+\alpha_\varrho n-n^2+\beta_\varrho pn+p\Sigma q_{n-\varrho-u}+vmp.$$

Maintenant la plus grande valeur de $p\Sigma q_{n-\varrho-u}$ est

$$114. \quad p\Sigma\frac{(n-\varrho-u)(m+r)}{n} = p(n-\varrho-v)(m+r).$$

En substituant dans l'expression (113.) on voit que le degré d'un terme quelconque de $\psi(x)$ déviendra tout au plus:

$$115. \quad \alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pnm-p\varrho m = \mu p.$$

Donc $f_v(x)$ doit être du dégré $v+\varrho+\alpha_\varrho-n+\beta_\varrho p+pq_{n-\varrho-v}$.

En désignant maintenant par l_v le nombre entier égal à $\frac{v+\varrho+\alpha_\varrho}{p}$ ou immédiatement moindre que cette fraction, on voit aisément que le nombre des coëfficiens de $f_v(x)$ doit être $l_v-r+\beta_\varrho+q_{n-\varrho-v}+1$, et le nombre des coëfficiens dans toutes les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ égal à:

$$116. \quad \beta_\varrho n-rn+n+\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_v}}(q_{n-\varrho-v}+l_v).$$

Pour trouver la valeur de $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma_v}}(l_v)$ soit:

$$117. \quad \varrho+\alpha_\varrho = e_\varrho p+g_\varrho,$$

on trouvera

$$118.\quad \begin{cases} l_0 = e_\varrho, \\ l_1 = e_\varrho, \\ \vdots \quad \vdots \\ l_{p-g_\varrho} = e_\varrho+1, \\ l_{p-g_\varrho+1} = e_\varrho+1, \\ \vdots \quad \vdots \\ l_{p-2g_\varrho} = e_\varrho+2, \\ \vdots \quad \vdots \\ l_{(r-1)p-g_\varrho} = e_\varrho+r-1, \\ \vdots \quad \vdots \\ l_{rp-g_\varrho} = e_\varrho+r, \\ \vdots \quad \vdots \\ l_{rp-1} = e_\varrho+r. \end{cases}$$

Donc:

$$119.\quad \sum_0^{n-1}{}_v\, l_v = ne_\varrho+rg_\varrho+(1+2+\dots+r-1)p = r(\varrho+\alpha_\varrho)+\frac{n(r-1)}{2}.$$

De plus on a:

$$120.\quad \sum_0^{n-1}{}_v\, q_{n-\varrho-v} = \sum_1^{n-1}{}_v\, q_v-(m+r)(\varrho-1),$$

et en designant par b' le plus grand commun facteur de $m+r$ et n:

$$121.\quad \sum_1^{n-1}{}_v\, q_v = \frac{(m+r-1)(n-1)+b'-1}{2};$$

donc:

$$122.\quad \sum_0^{n-1}{}_v\, q_{n-\varrho-v} = \frac{(m+r-1)(n-1)+b'-1}{2}-(m+r)(\varrho-1).$$

En substituant ces valeurs de $\sum_0^{n-1}{}_v\, l_v$ et de $\sum_0^{n-1}{}_v\, q_{n-\varrho-v}$ dans l'expression (116.) on trouvera que le nombre des coëfficiens est égal à

$$123.\quad \beta_\varrho n+\alpha_\varrho r-m\varrho+\frac{nm+m+r+b'}{2}.$$

En remarquant maintenant qu'un de ces coëfficiens doit être indépendant, le nombre des coëfficiens qu'on peut déterminer par les μ équations (90.) sera:

$$\beta_\varrho n+\alpha_\varrho r-m\varrho+\frac{mn+m+r+b'-2}{2}.$$

Le nombre ν des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ qui doivent être déterminées par les mêmes équations (90.), sera donc:

$$124.\quad \nu = \frac{m(n-1)-r-b'+2}{2},$$

et on aura le théorème suivant.

Théorème 15. Soit:

$$125.\quad P(x) = \int \frac{x^{s-rp-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[rp]{(R(x^p))^{rp-s}}},$$

où $\mathfrak{F}(x^p)$ est une fonction rationnelle quelconque de x^p, $R(x^p)$ une fonction entière de x^p du degré m; s, p et r des nombres entiers quelconques et b' le plus grand commun facteur de $m+r$ et rp, la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme (125.) sera toujours réductible à un nombre $\frac{m(rp-1)-r-b'+2}{2}$ de fonctions de la même forme, dont les variables sont racines d'une équation du degré $\frac{m(rp-1)-r-b'+2}{2}$, et à une expression algébrique et logarithmique.

Si $\nu =$ ou < 0, la fonction (125.) devient intégrable. On doit donc avoir dans ce cas:

$$126.\quad m(n-1)-r-b'+2 = \text{ ou } < 0.$$

De là on trouve, en supposant:

$$m+r = db',$$
$$mn-b'(d+1)+2 = \text{ ou } < 0,$$
$$b'(d+1) = \text{ ou } > mn+2,$$
$$(m+r)(d+1) = \text{ ou } > d(mn+2)$$
$$1+\frac{1}{d} = \text{ ou } > \frac{mn+2}{m+r}$$

et parceque $d =$ ou > 1:

$$127.\quad \frac{mn+2}{m+r} = \text{ ou } < 2,$$

et de là

$$128.\quad n = \text{ ou } < 2+\frac{2(r-1)}{m}.$$

Si maintenant $m > 2$, on aura

$$n < r+1,$$
$$n = r,$$
$$m(n-1)-r-b'+2 > n-b',$$

et parceque b' est tout au plus égal à n:

$$\nu > 0.$$

Si $m=2$, on aura:

$$n = r,$$

$$m(n-1)-r-b'+2 = n-b'.$$

On doit donc avoir $b'=n$. Mais b' doit être un facteur de $m+r=2+n$; donc:

$$129.\quad n=2,\quad r=2,\quad p=1,\quad m=2,\quad \nu=0.$$

L'intégrale (125.) devient donc:

$$130.\quad \int\frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt{(a_0+a_1x+a_2x^2)}}.$$

Si $m=1$, on tirera de l'équation (128.):

$$n = \text{ou} < 2r.$$

Donc ou $n=2r$, ou $n=r$. Si $n=2r$, on aura:

$$m(n-1)-r-b'+2 = r+1-b'.$$

Donc, la plus grande valeur de b' étant $m+r=r+1$, on doit avoir:

$$r+1 = b'.$$

Mais $n=2r$ doit être divisible par b'; donc:

$$131.\quad r=1,\quad n=2,\quad p=2,\quad m=1,\quad \nu=0.$$

L'intégrale (125.) devient donc:

$$132.\quad \int\frac{\mathfrak{F}(x^2)\,dx}{\sqrt{(1+bx^2)}}.$$

Si $n=r$, on aura:

$$m(n-1)-r-b'+2 = 1-b'.$$

Maintenant b' doit être un facteur commun de $m+r=n+1$ et de n; donc $b'=1$, et:

$$133.\quad n=r,\quad m=1,\quad \nu=0.$$

L'intégrale (125.) devient alors:

$$134.\quad \int\frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt[n]{(1+cx)^{n-1}}}.$$

Donc les fonctions (130, 132 et 134.) sont les seules fonctions intégrables par le théorème 15 tant qu'on laisse indéterminés les coëfficiens de x dans $\mathfrak{F}(x^p)$ et $R(x^p)$. Elles sont au reste déjà connues.

Chapitre 3.

Sur la réduction des intégrales de la forme $\int \frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ entre elles par des fonctions algébriques.

Soit $\mathfrak{F}(x^p)$ une fonction rationnelle quelconque de x^p, on peut, comme on sait, décomposer $x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)$ en plusieurs termes de la forme Ax^{mp+s-1} et $\frac{Ax^{s-\gamma p-1}}{(x^p-a^p)^{m_1}}$, m_1 étant un nombre entier quelconque positif, γ le nombre entier contenu dans $\frac{s-1}{p}$ et m un nombre entier positif ou négatif égal à $-\gamma$ ou plus grand que $-\gamma$. L'intégrale proposée est donc décomposable en plusieurs autres intégrales de la forme

$$\int \frac{x^{mp+s-1}\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{s-\gamma p-1}\,dx}{(x^p-a^p)^{m_1}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.$$

Nous allons chercher les réductions de ces intégrales séparement et ensemble.

§. 1.

Réduction des intégrales de la forme $\int \frac{x^{mp+s-1}\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ entre elles.

Pour trouver la rélation la plus générale possible entre les intégrales de la forme $\int \frac{x^{mp+s-1}\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ et une expression algébrique, il faudra chercher la fonction algébrique la plus générale dont la différentielle peut se décomposer en termes de cette forme. Or on sait que cette fonction algébrique doit être une fonction rationnelle de x et de $\sqrt[n]{(R(x^p))}$. Une telle fonction peut toujours être mise sous la forme suivante, en désignant par $Q_\nu(x)$ une fonction entière de x:

$$135. \quad f(x, \sqrt[n]{(R(x^p))})$$
$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu \left[Q_\nu(x)\cdot\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}\right] + \sum_0^{n}{}_\varrho \sum_1^{\varrho}{}_\mu \sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{A_{\nu,\mu,\varrho}\,x^\varrho\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}}{(x^{r_{\nu,\mu,\varrho}}-a^{r_{\nu,\mu,\varrho}}_{\nu,\mu,\varrho})^\mu}\right).$$

En différentiant une quelconque des fonctions contenues dans le premier terme du second membre de cette équation, on obtiendra:

$$136.\quad d(Q_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}) = \frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\nu}}}\left(R(x^p)\frac{dQ'_\nu(x)}{dx} + \frac{\nu}{n}Q_\nu(x)\frac{dR(x^p)}{dx}\right).$$

De là on voit qu'on doit avoir:

$$137.\quad n-\nu = s,$$

$$138.\quad \nu = n-s.$$

En différentiant une quelconque des fractions du second membre de l'équation (135.), on obtiendra:

$$139.\quad d\left(\frac{x^\varrho\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}}{(x^r-a^r)^\mu}\right)$$

$$= \frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\nu}}}\left(\frac{\frac{\nu}{n}x^\varrho\frac{dR(x^p)}{dx}+\varrho x^{\varrho-1}R(x^p)}{(x^r-a^r)^\mu} - \frac{\mu r x^{\varrho+r-1}R(x^p)}{(x^r-a^r)^{\mu+1}}\right).$$

Afin que le coëfficient de $\frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\nu}}}$ dans le second membre de cette équation puisse devenir une fonction entière de x, $R(x^p)$ doit être divisible par $(x^r-a^r)^{\mu+1}$; donc $p = cr$, c étant un nombre entier. Chaque terme de ce coëfficient dévient dans ce cas de la forme $x^{ep+fr+\varrho-1}$, où f dans les differents termes doit avoir toutes les valeurs entières dépuis zéro jusqu'à $c-1$. Mais toutes les termes doivent être de la forme x^{mp+s-1}; donc: $fr+\varrho = s+ep$, $\varrho = s+ep-fr$. Maintenant dans l'équation (139.) ϱ doit être constant tandis que dans le développement du second membre de cette équation f doit avoir toutes les valeurs entières dépuis 0 jusqu'à $c-1$. Donc $c-1=0$, $c=1$, $r=p$, $\varrho = s+ep$, la moindre valeur de e étant le nombre entier égal à $-\frac{s}{p}$ ou immédiatement plus grand que $-\frac{s}{p}$. Si on désigne ce nombre par $-\gamma'$, on aura, parceque ϱ doit être moindre que $r=p$:

$$140.\quad \varrho = s-\gamma' p.$$

En substituant les valeurs de ν et ϱ dans les équations (135, 136 et 139.), et en supposant:

$$141.\quad R(x^p)$$

$$= a_0 + a_1x^p + a_2x^{2p}) + \dots a_mx^{mp}$$

$$= (x^p-b_1^p)^{t_1}(x^p-b_2^p)^{t_2}\dots(x^p-b_q^p)^{t_q}(c_0+c_1x^p+c_2x^{2p}+\dots c_zx^{zp})$$

$$= (x^p-b_\varrho^p)^{t_\varrho}(d_{\varrho,0}+d_{\varrho,1}x^p+d_{\varrho,2}x^{2p}+\dots d_{\varrho,v_\varrho}x^{v_\varrho\cdot p})$$

on obtiendra:

$$142.\quad f(x,\sqrt[n]{(R(x^p))}) = Q(x).\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}} + \sum_1^q{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu \left(\frac{A_{\nu,\varrho}.x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right),$$

$$143.\quad df(x,\sqrt[n]{(R(x^p))}) = \frac{S\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}\left\{R(x^p)\frac{dQ(x)}{dx} + \frac{n-s}{n}.Q(x)\frac{dR(x^p)}{dx}\right.$$
$$+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}.\left(\frac{\frac{n-s}{n}x^{s-\gamma' p}\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu} + \frac{(s-\gamma' p)\,x^{s-\gamma' p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\nu p\,x^{s-(\gamma'-1)p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}}\right)\right\}.$$

Mais on sait qu'on doit avoir

$$144.\quad S = f_{-\gamma}x^{s-\gamma p-1} + f_{-(\gamma-1)}x^{s-(\gamma-1)p-1} + \dots f_0 x^{s-1} + f_1 x^{s+p-1} + \dots f_r x^{s+rp-1}$$
$$= \sum_{-\gamma}^{+r}{}_q f_q x^{s+qp-1}.$$

Donc, en comparant les deux membres de l'équation (143.) on voit aisément qu'on doit avoir:

$$145.\quad Q(x) = e_{-\gamma'}x^{s-\gamma' p} + e_{-(\gamma'-1)}.x^{s-(\gamma'-1)p} + \dots e_0 x^s + e_1 x^{s+p} + \dots e_k x^{s+kp}$$
$$= \sum_{-\gamma'}^{k} e_q x^{s+qp}.$$

Donc:

$$146.\quad \frac{dQ(x)}{dx} = (s-\gamma p)e_{-\gamma}x^{s-\gamma p-1} + (s-(\gamma-1)p)e_{-(\gamma-1)}.x^{s-(\gamma-1)p-1} + \dots$$
$$\dots s e_0 x^{s-1} + (s+p)e_1 x^{s+p-1} + \dots (s+kp)e_k x^{s+kp-1} = \sum_{-\gamma}^{k}{}_q (s+qp)e_q x^{s+qp-1},$$

en remarquant que quand s est divisible par p, on a $\gamma = \gamma' - 1$, et $s-\gamma' p = 0$, mais quand s n'est pas divisible par p, qu'on a $\gamma' = \gamma$.

En substituant ces valeurs de $Q(x)$ et de $\frac{dQ(x)}{dx}$ dans l'équation (143.) et en développant cette équation, on trouvera aisément que le coëfficient de $x^{s+\sigma p-1}$ dans le développement de $\left(R(x^p)\frac{dQ(x)}{dx} + \frac{n-s}{n}Q(x)\frac{dR(x^p)}{dx}\right)$ est égal à:

$$147.\quad D(\sigma) = \sum_0^m{}_\gamma \left(s + \sigma p - \frac{sp\gamma}{n}\right)a_\gamma e_{\sigma-\gamma}.$$

De même on trouvera que le coëfficient de $x^{s+\sigma p-1}$ dans le développement de

$$\frac{\frac{n-s}{n}\cdot x^{s-\gamma' p}\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}+\frac{(s-\gamma' p)x^{s-\gamma p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}-\frac{\nu p\, x^{s-(\gamma'-1)p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}}$$ est égal à:

$$148. \quad E_{\nu,\varrho}(\sigma)$$

$$=\sum_0^{v_\varrho}{}_\gamma\Big[(-1)^{t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma'}.b_\varrho^{(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')p}.d_{\varrho,\gamma}\Big(\frac{(t_\varrho-\nu-1)(t_\varrho-\nu-2)\ldots(\sigma+\gamma'-\gamma+1)}{1.2.3\ldots(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')}\Big)$$
$$\times\Big(\Big(\frac{n-s}{n}\Big)(pt_\varrho(\sigma+\gamma'-\gamma)+\gamma p(t_\varrho-\nu))+(s-\gamma' p)(t_\varrho-\nu)-\nu p(\sigma+\gamma'-\gamma)\Big)\Big]$$
$$=\sum_0^{v_\varrho}{}_\gamma\Big[(-1)^{t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma'}.b_\varrho^{(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')p}.d_{\varrho,\gamma}\Big(\frac{(t_\varrho-\nu-1)(t_\varrho-\nu-2)\ldots(\sigma+\gamma'-\gamma+1)}{1.2.3\ldots(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')}\Big)$$
$$\times\Big((t_\varrho-\nu)(p\sigma+s)+\frac{s(\nu\gamma-t_\varrho\sigma-t_\varrho\gamma')}{r}\Big)\Big].$$

A l'aide de ces équations on peut déterminer les coëfficiens de S, et on aura:

$$149. \quad f_\sigma = D(\sigma)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}.E_{,\varrho\nu}(\sigma).$$

Pour déterminer les coëfficiens de la prémière et de la troisième expression de $R(x^p)$ dans l'équation (141.) à l'aide de ceux de la seconde, on aura:

$$150. \quad a_\varrho = c_{\varrho-(t_1+t_2+\ldots t_q)}$$
$$+\sum_1^q{}_\gamma\sum_0^{t_\gamma-1}{}_{\beta_\gamma}\Big(\frac{\Gamma(t_1+1).\Gamma(t_2+1)\ldots\Gamma(t_q+1)}{\Gamma(\beta_1+1).\Gamma(\beta_2+1)\ldots\Gamma(\beta_q+1).\Gamma(t_1-\beta_1+1).\Gamma(t_2-\beta_2+1)\ldots\Gamma(t_q-\beta_q+1)}$$
$$\times b_1^{t_1-\beta_1}.b_2^{t_2-\beta_2}\ldots b_q^{t_q-\beta_q}.c_{\varrho-(\beta_1+\beta_2+\ldots\beta_q)}.(-1)^{\sum_1^q{}_\nu(\beta_\nu-\beta_\nu)}\Big),$$

$$151. \quad d_{\varrho,\mu} = c_{\mu+t_\mu-\sum_1^q{}_\nu t_\nu}+\sum_0^{t_1-1}{}_{\beta_1}\sum_0^{t_2-1}{}_{\beta_2}\ldots\sum_0^{t_{\varrho-1}-1}{}_{\beta_{\varrho-1}}\sum_0^{t_{\varrho+1}-1}{}_{\beta_{\varrho+1}}\ldots$$
$$\ldots\sum_0^{t_q-1}{}_{\beta_q}\Big(\frac{\Gamma(t_1+1)\Gamma(t_2+1)\ldots\Gamma(t_{\varrho-1}+1)\Gamma(t_{\varrho+1}+1)\ldots\Gamma(t_q+1)}{\left\{\begin{matrix}\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\ldots\Gamma(\beta_{\varrho-1}+1)\Gamma(\beta_{\varrho+1}+1)\ldots\Gamma(\beta_q+1).\Gamma(t_1-\beta_1+1)\ldots\\ \ldots\Gamma(t_{\varrho-1}-\beta_{\varrho-1}+1)\Gamma(t_{\varrho+1}-\beta_{\varrho+1}+1)\ldots\Gamma(t_q-\beta_q+1)\end{matrix}\right\}}$$
$$\times b_1^{t_1-\beta_1}\ldots b_{\varrho-1}^{t_{\varrho-1}-\beta_{\varrho-1}}.b_{\varrho+1}^{t_{\varrho+1}-\beta_{\varrho+1}}\ldots b_q^{t_q-\beta_q}.c_{\mu+\beta_\varrho-\sum_1^q{}_\nu\beta_\nu}.(-1)^{\sum_1^q{}_\nu(t_\nu-\beta_\nu)+\beta_\varrho-t_\varrho}\Big).$$

En donnant maintenant dans l'équation (149.) à σ successivement les valeurs $-\gamma$, $-(\gamma-1)$, ... $+r$, on obtiendra tous les coëfficiens de S et de même toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux membres de l'équation (143.). On voit de plus par cette équation que:

$$152. \quad r = m+k.$$

En intégrant l'équation (143.) on obtiendra:

$$153.\quad f_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+f_{-(\gamma-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots f_{m+k}\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(Q(x)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma' p}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

Cette équation présente la rélation la plus générale exprimable par des fonctions algébriques entre plusieurs intégrales de la forme $\int\frac{x^{s+mp-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$. Le premier membre de cette équation est en même temps l'intégrale la plus générale de la forme $\int\frac{S\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))}}$, S étant une fonction entière de x déterminée par l'équation (144.), qui est intégrable par des fonctions algébriques.

En substituant les valeurs de σ dans l'équation (149.) on obtiendra les $m+k+\gamma+1$ équations suivantes:

$$154.\quad\begin{cases} f_{-\gamma}=D(-\gamma)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}.E_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\ f_{-(\gamma-1)}=D(-(\gamma-1))+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}.E_{\nu,\varrho}(-(\gamma-1)),\\ \dots\dots\dots\dots\\ f_{m+k}=\left(s+(m+k)p-\frac{spm}{n}\right)e_k a_m.\end{cases}$$

Le nombre des quantités déterminées par ces équations doit être égal au nombre $m+k+\gamma+1$ des équations. Maintenant le nombre des coëfficiens de $Q(x)$ est $k+\gamma'+1$ et le nombre des quantités $A_{\nu,\varrho}$ est $t_1+t_2+\dots t_q-q=m-z-q$. Donc $z+q+\gamma-\gamma'$ parmi les quantités $f_{-\gamma}$, $f_{-(\gamma-1)}$, ... f_{m+k} doivent être déterminées par les équations (154.); les autres seront arbitraires; seulement on ne pourra pas les supposer toutes égales à zéro. En effet, par λ équations entre λ inconnues d'une forme telle qu'il n'y a pas de termes où les inconnues ne se trouvent pas, on ne pourra déterminer que $\lambda-1$ inconnues, et on obtiendra une équation de condition entre les coëfficiens des inconnues. On peut donc supposer:

$$155.\quad\begin{cases} f_{m+k}=-1,\\ f_{z+q-\gamma'}=f_{z+q-\gamma'+1}=\dots f_{m+k-1}=0,\end{cases}$$

et on obtiendra en substituant ces valeurs dans l'équation (153.):

$$156.\quad \int\frac{x^{s+(m+k)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p)^s}}$$

$$=f_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+f_{-(\gamma-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots f_{z+q-\gamma'+1}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$-\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(Q(x)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\left(\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma'p}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right)\right).$$

Pour déterminer $A_{1,1}$, $A_{2,1}$, ... $A_{t_q-1,q}$, $e_{-\gamma'}$, $e_{-(\gamma'-1)}$, ... e_k, on aura les équations (155.), et par les $z+q+\gamma-\gamma'$ premières équations (154.) on déterminera ensuite $f_{-\gamma}$, $f_{-(\gamma-1)}$, ... $f_{z+q-\gamma'-1}$. Il y a à remarquer que la plus petite valeur de k est $-\gamma'$.

Donc, afin qu'une fonction de la forme $\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ puisse être intégrable algébriquement il faut qu'on ait ou $z+q=1$ et s divisible par γ, ou les équations suivantes:

$$157.\quad f_{-\gamma}=0,\ f_{-(\gamma-1)}=0,\ \dots\dots f_{z+q-\gamma'-1}=0.$$

On voit aisément que dans le premier cas on aura:

$$s=\gamma'p=(\gamma+1)p,$$
$$R(x^p)=(x^p-b^p)^t,$$
$$m=t,$$
$$\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}=\int\frac{x^{(\gamma'+t+k)p-1}dx}{\sqrt[rp]{(x^p-b^p)^{tp\gamma'}}}=\int\frac{x^{(\gamma'+t+k)p-1}dx}{\sqrt[r]{(x^p-b^p)^{t\gamma'}}}.$$

En supposant donc:

$$\gamma'+t+k=a,$$
$$\gamma't=c,$$

l'intégrale donnée deviendra:

$$\int\frac{x^{ap-1}dx}{\sqrt[r]{(x^p-b^p)^c}},$$

r, a, p, c étant des nombres entiers positifs quelconques. L'intégration de cette fonction s'execute ordinairement en mettant $y+b^p$ au lieu de x^p, mais elle peut aussi être faite à l'aide de l'équation (156.) en décomposant c d'une manière quelconque en deux facteurs γ' et t et en faisant:

$$158.\quad Q(x)=e_{-\gamma'}+e_{-(\gamma'-1)}x^p+\dots e_0x^{\gamma'p}+e_1x^{(\gamma'+1)p}+\dots e_{a-\gamma'-t}x^{(a-t)p}.$$

L'équation (156.) déviendra donc:

$$159.\quad \int\frac{x^{ap-1}dx}{\sqrt[r]{(x^p-b^p)^c}}$$

$$= C-\sqrt[r]{(x^p-b^p)^{rt-c}}\Big(e_{-\gamma'}+e_{-(\gamma'-1)}x^p+\ldots. e_0x^{\gamma'p}+e_1x^{(\gamma'+1)p}+\ldots.$$
$$\ldots. e_{a-\gamma'-t}.x^{(a-t)p}+\sum_1^{t-1}{}_{\nu}\frac{A_\nu}{(x^p-b^p)^\nu}\Big).$$

Pour déterminer A_1, A_2, ... A_{t-1}, $e_{-\gamma'}$, $e_{-(\gamma'-1)}$, ... $e_{a-\gamma'-t}$, on aura les équations suivantes:

$$160.\quad\begin{cases} D(-\gamma) \quad +\sum_1^{t-1}{}_\nu A_\nu.E_\nu(-\gamma) = 0,\\ D(-(\gamma-1))+\sum_1^{t-1}{}_\nu A_\nu.E_\nu(-(\gamma-1)) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D(a-\gamma'-1)+\sum_1^{t-1}{}_\nu A_\nu.E_\nu(a-\gamma'-1) = 0,\\ D(a-\gamma') \quad +\sum_1^{t-1}{}_\nu A_\nu.E_\nu(a-\gamma') = \left(a-\frac{\gamma' t}{r}\right)pe_{a-\gamma'-t} = -1. \end{cases}$$

Afin que le nombre des coëfficiens de $Q(x)$ devienne le plus petit possible, t doit être le plus grand facteur de c, simple ou composé, égal à a ou moindre que a.

Dans le second cas, si on a les équations (157.), on déterminera par là $z+q+\gamma-\gamma'$ des $z+q+1$ quantités b_1, b_2, ... b_q, c_0, c_1, ... c_z et en remarquant que $\gamma=\gamma'$ si s n'est pas divisible par p, et $\gamma'=\gamma+1$ si s est divisible par p, on voit qu'on peut déterminer les coëfficiens de $R(x^p)$, si s est divisible par p, par deux, et, si s n'est pas divisible par p, par une d'entre elles, de manière que la fonction $\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ devient intégrable algébriquement. On voit aisément que les différentielles qui sont intégrables algébriquement dans ce cas, les coëfficiens de $R(x^p)$ étant quelconques, sont les mêmes que dans le cas précédent.

§. 2.

Réduction des intégrales de la forme $\int\frac{x^{k-\gamma p-1}dx}{(x^p-g^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ entre elles et aux intégrales de la forme $\int\frac{x^{mp+s-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$.

Pour réduire cette intégrale il faut, comme on le voit par l'équation (139.) qu'on ait

$$161.\quad f(x,\sqrt[n]{(R(x^p))})$$
$$=\sum_1^{u-1}{}_\mu \frac{A_\mu x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}{(x^p-g^p)^\mu}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}.$$

En différentiant cette équation on trouvera:

$$162.\quad df(x,\sqrt[n]{(R(x^p))})=\frac{S\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=\frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}\left\{\sum_1^{u-1}{}_\mu A_\mu\left(\frac{\frac{n-s}{n}x^{s-\gamma' p}\frac{dR(x^p)}{dx}+(s-\gamma' p)x^{s-\gamma p-1}R(x^p)}{(x^p-g^p)^\mu}-\frac{\mu p\,x^{s-(\gamma'-1)p-1}R(x^p)}{(x^p-g^p)^{\mu+1}}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}\left(\frac{\frac{n-s}{n}x^{s-\gamma' p}\frac{dR(x^p)}{dx}+(s-\gamma' p)x^{s-\gamma p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}-\frac{\nu p\,x^{s-(\gamma'-1)p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}}\right)\right\}.$$

Maintenant on peut faire

$$163.\quad R(x^p)=h_0+h_1(x^p-g^p)+h_2(x^p-g^p)^2+\ldots+h_m(x^p-g^p)^m.$$

Pour déterminer h_0, h_1, ... h_m, il faut mettre x^p+g^p au lieu de x^p, et on aura alors en substituant pour $R(x^p)$ sa valeur déterminée par l'équation (141.):

$$a_0+a_1(x^p+g^p)+a_2(x^p+g^p)^2+\ldots\ldots+a_m(x^p+g^p)^m$$
$$=h_0+h_1x^p+h_2x^{2p}+\ldots\ldots+h_mx^{mp}.$$

De là on tire:

$$164.\quad h_\nu=a_\nu+\sum_{\nu+1}^m{}_\varrho\frac{\Gamma(\varrho+1).a_\varrho.g^{(\varrho-\nu)p}}{\Gamma(\nu+1).\Gamma(\varrho-\nu+1)}$$

En substituant maintenant la valeur de $R(x^p)$ déterminée par l'équation (163.), en développant et en remarquant que, parceque ou $\gamma'=\gamma+1$, ou $\gamma'=\gamma$, on a toujours:

$$165.\quad \frac{x^{s-(\gamma'-1)p-1}}{(x^p-g^p)^{\mu+1}}=\frac{x^{s-\gamma p-1}g^{p(1+\gamma-\gamma')}}{(x^p-g^p)^{\mu+1}}+\frac{(1+\gamma-\gamma')x^{s-\gamma p-1}}{(x^p-g^p)^\mu},$$

on trouvera:

$$166.\quad S=x^{s-\gamma p-1}\Big(k_{m+\gamma-\gamma'-1}(x^p-g^p)^{m+\gamma-\gamma'-1}+k_{m+\gamma-\gamma'-2}(x^p-g^p)^{m+\gamma-\gamma'-2}+\ldots$$
$$\ldots k_0+\frac{k_{-1}}{x^p-g^p}+\frac{k_{-2}}{(x^p-g^p)^2}+\ldots\ldots\frac{k_{-u}}{(x^p-g^p)^u}$$
$$+l_{m+\gamma-\gamma'-1}x^{(m+\gamma-\gamma'-1)p}+l_{m+\gamma-\gamma'-2}x^{(m+\gamma-\gamma'-2)p}+\ldots\ldots+l_1x^p+l_0\Big)$$
$$=x^{s-\gamma p-1}\left[\sum_0^{m+\gamma-\gamma'-1}\left((k_\gamma(x^p-g^p)^\gamma+l_\gamma x^{\gamma p})+\sum_1^u{}_\gamma\left(\frac{k_{-\gamma}}{(x^p-g^p)^\gamma}\right)\right]\right..$$

où:

$$167.\quad k_y=\sum_{1}^{n-1}{}_{\mu}A_{\mu}\Big[\frac{n-s}{n}(\mu+y+1)ph_{\mu+y+1}\,g^{p(1+\gamma-\gamma')}+\frac{n-s}{n}(\mu+y)ph_{\mu+y}(1+\gamma-\gamma')$$
$$+(s-\gamma'p)\,h_{\mu+y}-\mu ph_{\mu+y+1}\,g^{p(1+\gamma-\gamma')}-\mu ph_{\mu+y}(1+\gamma-\gamma')\Big]$$
$$=\sum_{1+y}^{m}{}_{z}\Big[h_z\Big(A_{z-y-1}\,g^{p(1+\gamma-\gamma')}\Big(yp+p-\frac{sz}{r}\Big)+A_{z-y}\Big(\Big(yp-\frac{sz}{r}\Big)(1+\gamma-\gamma')+s-\gamma'p\Big)\Big)\Big],$$

$$168.\quad l_y=\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}(A_{\nu;\varrho}E_{\nu,\varrho}(y-\gamma))=$$
$$\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\sum_{0}^{v_\varrho}{}_{z}A_{\nu,\varrho}\Big[(-1)^{t_\varrho+z-y+\gamma-\gamma'-\nu}.\,b_\varrho^{(t_\varrho+z-y+\gamma-\gamma'-\nu)p}.\,d_{\varrho,z}\Big(\frac{(t_\varrho-\nu-1)(t_\varrho-\nu-2)\dots(y+1+\gamma'-\gamma-z)}{1.2\dots(t_\varrho+z-y+\gamma-\gamma'-\nu)}\Big)$$
$$\times\Big((t_\varrho-\nu)(s+p(y-\gamma))+\frac{s(\nu z-t_\varrho(y+\gamma'-\gamma))}{r}\Big)\Big].$$

De plus on peut toujours faire:

$$169.\quad \sum_{0}^{m-1-\gamma'+\gamma}{}_{y}k_y(x^p-g^p)^y=\sum_{0}^{m-1-\gamma'+\gamma}{}_{y}k'_y\,x^{yp},$$

où

$$170.\quad k'_y=k_y+\sum_{1}^{m-y-1}{}_{\sigma}\frac{\Gamma(y+\sigma+1)\,k_{y+\sigma}\,g^{\sigma p}.(-1)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(y+1)}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (166.) et en supposant:

$$171.\quad k'_y+l_y=\tau_y$$

on trouvera:

$$172.\quad S=x^{s-\gamma p-1}\Big[\sum_{0}^{m-1-\gamma'+\gamma}{}_{y}\tau_y\,x^{yp}+\sum_{1}^{u}{}_{y}\Big(\frac{k_{-y}}{(x^p-g^p)^y}\Big)\Big].$$

En donnant maintenant à y dans l'équation (167.) toutes les valeurs entières dépuis $-u$ jusqu'à $m+\gamma-\gamma'-1$ et dans les équations (168, 170 et 171.) à y toutes les valeurs entières dépuis 0 jusqu'à $m+\gamma-\gamma'-1$, on obtiendra tous les coëfficiens de S et de même toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux membres de l'équation (162.). Ces équations seront donc les $m+u+\gamma-\gamma'$ équations que voici:

173.
$$\begin{cases}
\tau_{m+\gamma-\gamma'-1} = a_m A_1\left[mp+s-\gamma'p-p-\frac{sm}{r}\right]+a_m\left(\frac{n-s}{n}pm+s-\gamma'p-p\right)\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}(A_{1,\varrho}),\\
\tau_{m+\gamma-\gamma'-2} = A_2\left[a_m\left(mp+s-\gamma'p-2p-\frac{sm}{r}\right)\right]\\
\quad +A_1\left[a_m\left(\left(mp-p-\frac{sm}{r}\right)(1+\gamma-\gamma')g^p+mg^p\left(mp-2p-\frac{s(m-1)}{r}+s-\gamma'p\right)\right.\right.\\
\quad\quad \left.-(m+\gamma-\gamma'-1)\left(mp+p-\frac{sm}{r}+s-\gamma'p\right)\right)\\
\quad\quad\quad \left.+a_{m-1}\left(mp-2p-\frac{s(m-1)}{r}+s-\gamma'p\right)\right]\\
\quad +a_{m-1}\left(mp-2p+s-\gamma'p-\frac{s(m-1)}{r}\right)\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}(A_{1,\varrho})\\
\quad +a_{m-1}\left(mp-2p+s-\gamma'p-\frac{sm}{r}\right)\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}(A_{2,\varrho})\\
\quad +a_m\left(mp-2p+s-\gamma'p-\frac{sm}{r}\right)\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}(b_\varrho^p A_{1,\varrho}+t_\varrho b_\varrho^p A_{2,\varrho})\\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
k_{-(u-2)} = h_2\left[A_{u-1}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}\left(\frac{n-2s}{n}-(u-2)\right)\right]\\
\quad +h_1\left[A_{u-2}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}\left(\frac{n-s}{n}-(u-2)\right)+A_{u-1}\left(p\left(\frac{n-s}{n}-(u-1)\right)(1+\gamma-\gamma')+s-\gamma'p\right)\right]\\
\quad +h_0\left[A_{u-3}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}\left(\frac{n}{n}-(u-2)\right)+A_{u-2}\left(p\left(\frac{n}{n}-(u-1)\right)(1+\gamma-\gamma')+s-\gamma'p\right)\right],\\
k_{-(u-1)} = h_1\left[A_{u-1}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}\left(\frac{n-s}{n}-(u-1)\right)\right]\\
\quad +h_0\left[A_{u-2}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}\left(\frac{n}{n}-(u-1)\right)+A_{u-1}\left(p\left(\frac{n}{n}-u\right)(1+\gamma-\gamma')+s-\gamma'p\right)\right],\\
k_{-u} = h_0 A_{u-1}pg^{p(1+\gamma-\gamma')}(1-u).
\end{cases}$$

En intégrant maintenant l'équation (162.), on obtiendra:

174.
$$\tau_{m+\gamma-\gamma'-1}\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\tau_{m+\gamma-\gamma'-2}\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-2)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots\ldots\tau_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$+k_{-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots\ldots k_{-u}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^p-g^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= x^{s-\gamma' p} \sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}} \Big(\frac{A_1}{x^p - g^p} + \frac{A_2}{(x^p-g^p)^2} + \frac{A_3}{(x^p-g^p)^3} + \dots \frac{A_{u-1}}{(x^p-g^p)^{u-1}}$$

$$+ \frac{A_{1,1}}{x^p - b_1^p} + \frac{A_{2,1}}{(x^p-b_1^p)^2} + \frac{A_{3,1}}{(x^p-b_1^p)^3} + \dots \frac{A_{t_1-1,1}}{(x^p-b_1^p)^{t_1-1}}$$

$$+ \frac{A_{1,2}}{x^p - b_2^p} + \frac{A_{2,2}}{(x^p-b_2^p)^2} + \frac{A_{3,2}}{(x^p-b_2^p)^3} + \dots \frac{A_{t_2-1,2}}{(x^p-b_2^p)^{t_2-1}}$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{A_{1,q}}{(x^p - b_q^p)} + \frac{A_{2,q}}{(x^p-b_q^p)^2} + \frac{A_{3,q}}{(x^p-b_q^p)^3} + \dots \frac{A_{t_q-1,q}}{(x^p-b_q^p)^{t_q-1}} \Big).$$

Le nombre des coëfficiens des quantités de la forme: $\dfrac{x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}{(x^p-g^p)^\nu}$ dans le second membre de cette équation est $u-1$, et celui des coëfficiens des quantités de la forme $\dfrac{x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}$ est $t_1+t_2+\dots t_q - q = m-z-q$. On aura donc par là $m+u-z-q-1$ quantités déterminées par les $m+u+\gamma-\gamma'$ équations (173.); donc $z+q+1+\gamma-\gamma'$ parmi les quantités: $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{m+\gamma-\gamma'-1}, k_{-1}, k_{-2}, \dots k_{-u}$ doivent aussi être déterminées par ces équations. Les autres seront arbitraires, sauf qu'au moins une d'entre elles soit différente de zéro. De plus on voit par les équations (161 et 162.) que u doit toujours être plus grand que l'unité. On peut donc supposer:

$$175. \quad \begin{cases} \tau_{m+\gamma-\gamma'-1} = 0, \\ \tau_{m+\gamma-\gamma'-2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{z+q+\gamma-\gamma'} = 0, \\ k_{-2} = 0, \\ k_{-3} = 0, \\ \dots\dots \\ k_{-(u-1)} = 0, \\ k_{-u} = -1, \end{cases}$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (174.), on obtiendra

$$176.\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^{-p}-g^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= k_{-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\tau_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\tau_1\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots$$

$$\dots\ \tau_{z+q+\gamma-\gamma'-1}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$-x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(\sum_1^{u-1}{}_\nu\frac{A_\nu}{(x^p-g^p)^\nu}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

Par les équations (175.) on déterminera les coëfficiens A_1, A_2, A_3, ... A_{u-1}, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ... $A_{t_q-1,q}$. Les coëfficiens τ_0, τ_1, τ_2, ... $\tau_{z+q+\gamma-\gamma'-1}$, k_{-1} seront ensuite déterminés par les équations (173.).

L'équation (176.) doit toujours être employée si h_0 n'est pas zéro, ou si $g^{p(1+\gamma-\gamma')}=0$. Dans ces cas elle devient illusoire comme on le voit par la dernière des équations (175.). Dans le premier cas, si $h_0=0$, x^p-g^p devient un facteur de $R(x^p)$, comme on le voit par l'équation (168.). Supposons donc symmetriquement:

$$177.\quad c_0+c_1x^p+c_2x^{2p}+\dots c_zx^{zp}$$
$$= c_z(x^p-b_{q+1}^p)^{t_{q+1}}(x^p-b_{q+2}^p)^{t_{q+2}}\dots(x^p-b_{q+z}^p)^{t_{q+z}},$$

où

$$178.\quad t_{q+1}=t_{q+2}=\dots=t_{q+z}=1.$$

Si maintenant $g=b_\gamma$, il y aura dans $R(x^p)$ t_γ facteurs de la forme x^p-g^p et on aura $h_0=h_1=\dots=h_{t_\gamma-1}=0$. Dans ce cas les quantités, k_{-u}, $k_{-(u-1)}$, ... $k_{-(u-t_\gamma+1)}$ deviendront égales à zéro, ce qu'on voit aisément par les équations (173.). Dans ce cas on doit donc supposer au lieu des équations (175.) les équations suivantes:

$$179.\quad\left\{\begin{array}{l}\tau_{m+\gamma-\gamma'-1}=0,\\ \tau_{m+\gamma-\gamma'-2}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \tau_{z+q+\gamma-\gamma'-t_\gamma+1}=0,\\ k_{-1}=0,\\ k_{-2}=0,\\ \dots\dots\dots\\ k_{-(u-t_\gamma-1)}=0,\\ k_{-(u-t_\gamma)}=-1,\end{array}\right.$$

et on tirera de l'équation (174.):

$$180.\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^p-b_y^p)^{u-t_y}\sqrt[n]{(R(x))^s}}$$

$$=\tau_0(y)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\tau_1(y)\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots\tau_{z+q+\gamma-\gamma'-t_y}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-t_y)p-1}dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$-x^{s-\gamma'p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(\sum_{1}^{u-1}{}_{\nu}\frac{A_\nu(y)}{(x^p-b_y^p)^\nu}+\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\frac{A_{\nu,\varrho}(y)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

où on peut donner à u toutes les valeurs entières positives plus grandes que t_y. Donc toutes les fois qu'il-y-a dans $R(x^p)$ t_y facteurs de la forme $x^p-b_y^n$ on peut toujours exprimer $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}dx}{(x^p-b_y^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ (u étant un nombre entier positif quelconque) par les $q+z+\gamma-\gamma'-t_y+1$ intégrales $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, $\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, ... $\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma'-t_y)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ et par une expression algébrique.

Dans le second cas, si $g^{p(1+\gamma-\gamma')}=0$, et par conséquent $g=0$ et $1+\gamma-\gamma'=1$, on voit par les équations (173.) que k_{-u} deviendra égal à zéro, mais qu'on pourra alors faire $k_{-(u-1)}=-1$. Au lieu des équations (175.) on aura donc les équations suivantes:

$$181.\quad\begin{cases}\tau_{m-1}=0,\\ \tau_{m-2}=0,\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ \tau_{q+z}=0,\\ k_{-1}=0,\\ k_{-2}=0,\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ k_{-(u-2)}=0,\\ k_{-(u-1)}=-1=A_{u-1}k_0(s-(u+\gamma-1)p).\end{cases}$$

Il y a à remarquer ici que parcequ'on a $\gamma=\gamma'$, s ne sera pas divisible par p, et que A_{u-1} aura par conséquent une valeur finie, si on n'a pas en même

temps $k_0 = 0$, ou si aucune des quantités b_γ n'est pas égale à zéro Ce cas excepté, on obtiendra de l'équation (174.), en marquant les quantités $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{q+x}, A_1, A_2, \ldots A_{u-1}, A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots A_{t_q-1,q}$, $u-1$ fois,

$$182.\quad \int \frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{(u-1)p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= \tau_0^{(u-1)}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + \tau_1^{(u-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + \ldots \tau_{q+x-1}\int\frac{x^{s+(q+x-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$-x^{s-\gamma p}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(\sum_1^{u-1}{}_\nu \frac{A_\nu^{(u-1)}}{x^{\nu p}} + \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu \frac{A_{\nu,\varrho}^{(u-1)}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right),$$

où on peut donner à u toutes les valeurs positives plus grandes que l'unité. La fonction $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{mp}.\sqrt[n]{(R(x))^s}}$, m étant un nombre entier quelconque, s n'étant pas divisible par p, et $R(x^p)$ n'étant pas divisible par x^p, peut donc toujours être exprimée par les $q+x$ intégrales

$$\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\ \int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\ \ldots\ \int\frac{x^{s+(q+x-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

et par une expression algébrique.

Si enfin $R(x^p)$ est divisible par x^p, et qu'on a par exemple $b_g = 0$, on supposera au lieu des équations (181.) les équations suivantes:

$$183.\quad \begin{cases} \tau_{m-1} = 0, \\ \tau_{m-2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tau_{q+x-t_g} = 0, \\ k_{-1} = 0, \\ k_{-2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_{-(u-t_g-2)} = 0, \\ k_{-(u-t_g-1)} = -1 = A_{u-1}k_{t_g}(s-(u+\gamma-1)p), \end{cases}$$

et on tirera alors de l'équation (174.):

$$184. \quad \int \frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{p(u-t_g-1)}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= \tau_0(g)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + \tau_1(g)\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + \ldots \tau_{q+x-t_g-1}(g)\int\frac{x^{s+(x+q-\gamma-t_g-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$-x^{s-\gamma p}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\left(\sum_1^{u-1}{}_\nu \frac{A_\nu(g)}{x^{\nu p}} + \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu \frac{A_{\nu,\varrho}(g)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

La fonction $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{mp}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, m étant un nombre entier quelconque, $\gamma=\gamma'$ et $b_g=0$, est par conséquent réductible aux $q+x-t_g$ intégrales:

$$\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad \int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad \ldots\ldots \quad \int\frac{x^{s+(q+x-\gamma-t_g-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

et à une expression algébrique. Dans tous les autres cas que ceux que nous venons de considérer cela est impossible.

Pour trouver une rélation entre les fonctions de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ il faut en vertu de ce que nous venons de démontrer que x^p-g^p soit un facteur de $R(x^p)$, ou que $g=0$ et $\gamma=\gamma'$. Nous considérerons donc séparement les trois cas suivants 1) si $1+\gamma-\gamma'=0$, 2) si $1+\gamma-\gamma'=1$, et si une des quantités b_γ p. e. $b_g=0$, 3) si $1+\gamma-\gamma'=1$ et aucune des quantités b_γ n'est pas egale à zéro.

Soit donc prémièrement $1+\gamma-\gamma'=0$, et par suite $s-\gamma' p=0$, $s-\gamma p=p$. On doit alors faire:

$$185. \quad C_1\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + C_2\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} + \ldots C_{q+x}\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_{q+x}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

$$= \sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\sum_1^{q+x}{}_\gamma\sum_1^{t_\gamma}{}_\nu\frac{B_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}.$$

En substituant ici pour $\int\frac{x^{p-1}dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ sa valeur tirée de l'équation (180.), on aura, en remarquant que $\tau_{q+x-t_\gamma-1+\mu}(\gamma)=0$ toutes les fois que $\mu>0$:

186. $$\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)C_\gamma)\int\frac{x^{p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_1(\gamma)C_\gamma)\int\frac{x^{2p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots$$
$$\dots\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_{q+z-2}(\gamma)C_\gamma)\int\frac{x^{(q+z-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\left[\sum_{1}^{t_\gamma}{}_{\nu}\frac{B_\nu(\gamma)+C_\gamma A_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}+\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\left(\frac{C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right)\right].$$

En différentiant cette équation et en divisant par $\frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, on trouvera:

187. $$\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)C_\gamma)x^{p-1}+\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_1(\gamma)C_\gamma)x^{2p-1}+\dots\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_{q+z-2}(\gamma)C_\gamma).x^{(q+z-1)p-1}$$
$$=\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\left\{\sum_{1}^{t_\gamma}{}_{\nu}\left[(B_\nu(\gamma)+C_\gamma A_\nu(\gamma))\left(\frac{\frac{n-s}{n}\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}-\frac{\nu p\,x^{p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\gamma^p)^{\nu+1}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\left[C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)\left(\frac{\frac{n-s}{n}\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}-\frac{\nu p\,x^{p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}}\right)\right]\right\}.$$

En multipliant maintenant les deux membres de cette équation par $(x^p-b_1^p)(x^p-b_2^p)\dots(x^p-b_{q+z}^p)$ et en mettant au lieu de x^p successivement b_1^p, b_2^p, ... b_{q+z}^p, on trouvera les équations suivantes:

188. $$\begin{cases}0=B_{t_1}(1)+C_1A_{t_1}(1),\\0=B_{t_2}(2)+C_2A_{t_2}(2),\\\dots\dots\dots\dots\\0=B_{t_{q+z}}(q+z)+C_{q+z}A_{t_{q+z}}(q+z).\end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (187.) on aura:

189. $$\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)C_\gamma)x^{p-1}+\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_1(\gamma)C_\gamma)x^{2p-1}+\dots\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_{q+z-2}(\gamma),C_\gamma)x^{(q+z-1)p-1}$$
$$=\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\left[(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))\left(\frac{\frac{n-s}{n}\cdot\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}-\frac{\nu p\,x^{p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}}\right)\right].$$

En comparant dans cette équation les coëfficiens des puissances égales de x, on trouvera les $m-1$ équations suivantes:

$$190.\begin{cases}\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_0(\gamma)C_\gamma) = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_1(\gamma)C_\gamma) = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(1-\gamma),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_{q+z-2}(\gamma)C_\gamma) = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-2).\end{cases}$$

$$191.\begin{cases}0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-1),\\ 0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(m-\gamma-2).\end{cases}$$

On aura donc en totalité $m+q+z-1$ équations, auxquelles les $m+q+z$ quantités $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... $B_{t_1}(1)$, $B_1(2)$, $B_2(2)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$, C_1, C_2, ... C_{q+z} doivent satisfaire. Si donc les coëfficiens des intégrales du premier membre de l'équation (186.) ne sont pas, ou égaux à zéro, ou à l'infini, une de ces intégrales doit être réductible aux $q+z-1$ autres et à une expression algébrique; mais cela est impossible, en vertu de ce que nous venons de démontrer dans le paragraphe précédent. De plus, si une des quantités de la forme $\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_\nu(\gamma)C_\gamma)$ était infinie, une ou plusieurs des quantités C_γ devaient être infinies, ce qui est impossible, comme on le voit aisément par les équations (187.). On pourra donc au lieu des équations (190.) mettre les équations suivantes:

$$192.\begin{cases}0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\ 0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(1-\gamma),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0 = \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-2).\end{cases}$$

En donnant à une des quantites $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$, C_1, C_2, ... C_{q+z} une valeur arbitraire différente de zéro, et en dé-

terminant les autres par les équations (188, 191 et 192.), l'équation (185.) donnera la rélation cherchée entre les integrales de la forme $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$. Si de plus quelques unes des équations (188, 191 et 192.) dépendent des autres équations, on pourra faire égales à zéro un même nombre de quantités $C_1, C_2, \ldots\ldots C_{q+z}$.

Supposons dans le second cas que $1+\gamma-\gamma'=1$, ou $\gamma=\gamma'$, et $b_g=0$. On doit alors supposer l'équation suivante:

$$193.\quad C_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+C_2\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots$$
$$\ldots C_{g-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-b_{g-1}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+C_g\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{x^p\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$+C_{g+1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-b_{g+1}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots\ldots C_{q+z}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=x^{s-\gamma p}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{t_\gamma}{}_{\nu}\frac{B_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}.$$

En substituant ici aux intégrales leurs valeurs tirées des formules (180 et 184.), en différentiant l'équation obtenue, en divisant par $\frac{x^{s-\gamma p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, puis multipliant par $(x^p-b_1^p)(x^p-b_2^p)\ldots\ldots(x^p-b_{g-1}^p)(x^p-b_{g+1}^p)\ldots$ $\ldots(x^p-b_{q+z}^p)$, et en mettant enfin au lieu de x successivement $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots b_{g-1}, 0, b_{g+1}, \ldots\ldots b_{q+z}$, on trouvera les équations suivantes:

$$194.\quad\begin{cases} B_{t_1}(1)+C_1A_{t_1}(1)=0,\\ B_{t_2}(2)+C_2A_{t_2}(2)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_{t_{g-1}}(g-1)+C_{g-1}A_{t_{g-1}}(g-1)=0,\\ B_{t_g}(g)\quad+C_gA_{t_g}(g)\quad=\dfrac{r\sum_1^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)C_\gamma)}{(rs-\gamma n-st_g)\,a_{t_g}},\\ B_{t_{g+1}}(g+1)+C_{g+1}A_{t_{g+1}}(g+1)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_{t_{q+z}}(q+z)+C_{q+z}A_{t_{q+z}}(q+z)=0. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs, on trouvera de plus les equations suivantes:

195.
$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma (\tau_0(\gamma) C_\gamma)\\
&= (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_{g,g}}(-\gamma) + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho - 1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma (\tau_1(\gamma) C_\gamma)\\
&= (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_{g,g}}(1-\gamma) + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho - 1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(1-\gamma),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma (\tau_{q+z-1}(\gamma) C_\gamma)\\
&= (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_{g,g}}(q+z-\gamma-1)\\
&\qquad + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho - 1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-1),
\end{aligned}\right.$$

196.
$$\left\{\begin{aligned}
0 &= (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_{g,g}}(q+z-\gamma)\\
&\qquad + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho - 1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_{g,g}}(m-\gamma-1)\\
&\qquad + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho - 1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(m-\gamma-1).
\end{aligned}\right.$$

On aura donc en tout $m+q+z$ équations d'une forme telle qu'une des quantités $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$, C_1, C_2, ... C_{q+z} entre dans chaque terme. Si aucune de ces équations ne dépend pas des autres, il sera donc impossible de déterminer les $m+q+z$ quantités $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... C_1, C_2, ... C_{q+z} de sorte qu'elles satisfassent à ces $m+q+z$ équations, et il sera par conséquent alors impossible de trouver une rélation entre les fonctions de la forme $\int \frac{x^{s-\gamma p-1} dx}{(x^p - b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$. Si au contraire un nombre k d'equations précédentes dépendent des autres, on voit par une raisonnement analogue à celui que nous venons d'employer dans le premier cas, qu'on aura $\sum_1^{q+z}{}_\gamma (\tau_\nu(\gamma) C_\gamma) = 0$ pour toutes les valeurs de ν. Dans ce cas on

pourra donner à une des quantités C_1, C_2, ... C_{q+z} une valeur arbitraire, mais différente de zéro, et à $k-1$ d'autres des valeurs quelconques p. e. la valeur zéro. Les $q+z-k$ quantités qui restent, ainsi que les m quantités $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$ seront alors déterminées par les equations (194, 196.) et par les suivantes:

$$197. \begin{cases} 0 = (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_g,g}(-\gamma) \\ \quad + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(-\gamma), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = (B_{t_g}(g) + C_g A_{t_g}(g)) E_{t_g,g}(q+z-\gamma-1) \\ \quad + \sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{q}{}_\varrho \sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu (B_\nu(\varrho) + C_\varrho A_\nu(\varrho) + C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)) E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-1), \end{cases}$$

et dans ce cas on pourra exprimer une quelconque des fonctions de la forme $\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$ par $q+z-k$ autres fonctions de la même forme.

Soit en troisieme lieu $\gamma=\gamma'$, mais sans qu'aucune des quantités b_ϱ soit égale à zéro. On doit alors faire:

$$198. \quad D\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{x^p.\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}} + C_1\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$$
$$+ C_2\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}} + \dots C_{q+z}\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$$
$$= x^{\alpha-\gamma p}\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}\left(\sum_1^{q+z}{}_\gamma \sum_1^{t_\gamma}{}_\nu \frac{B_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu} + E\right).$$

En substituant ici pour $\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{x^p\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$ et $\int \frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$ leurs valeurs tirées des equations (184 et 180.), on trouvera:

$$199. \quad \left(\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_0(\gamma)C_\gamma)+D\tau_0'\right)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\left(\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_1(\gamma)C_\gamma)+D\tau_1'\right)\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots$$
$$\dots\left(\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_{q+z-1}(\gamma)C_\gamma)+D\tau_{q+z-1}'\right)\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=x^{s-\gamma p}\sqrt[n]{(R(x))^s}\left[\sum_1^{t_\gamma}{}_\nu\frac{B_\nu(\gamma)+C_\gamma A_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}+\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{C_\gamma+A_{\nu,\varrho}(\gamma)+DA_{\nu,\varrho}'}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}+\frac{DA_1'}{x^p}+E\right].$$

En différentiant cette équation, en divisant par $\frac{x^{s-(\gamma+1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ et en faisant enfin $x=0$, on trouvera l'équation:

$$DA_1'(s-(\gamma+1)p)a_0=0,$$

et puisceque suivant la supposition ni $a_0=0$, ni $s-(\gamma+1)p=0$ et qu'en vertu de la dernière des équations (181.) on ne peut pas avoir $A_1'=0$, on aura nécessairement:

$$D=0.$$

On trouvera donc dans ce cas les mêmes équations (194, 195, 196.) que dans le cas précédent, en supposant seulement $B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g)=0$. Si donc parmi ces équations aucune ne dépends pas des autres, il sera impossible de trouver une rélation en fonctions algébriques entre les intégrales de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$. Si, au contraire, un nombre k de ces équations dépendent des autres, on pourra exprimer une quelconque des fonctions de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ par $q+z-k$ autres fonctions de la même forme.

Pour trouver les conditions qui doivent être remplies afin que l'expression

$$F_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+F_1\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots.F_{q+z+\gamma-\gamma-1}\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

soit reductible à des intégrales de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, on voit par ce qui précéde que x^p-g^p doit être un facteur de $R(x^p)$. Il faut donc faire:

200. $$F_0\int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+F_1\int\frac{x^{\alpha-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots F_{(q+z+\gamma-\gamma'-1)}\int\frac{x^{\alpha+(q+z-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=G_1\int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+G_2\int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots G_{q+z}\int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$+x^{\alpha-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{t_\gamma}{}_{\nu}\frac{H_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}.$$

En substituant maintenant les valeurs des intégrales du second membre de cette équation, tirées de l'équation (180.), on aura:

201. $$\Big(F_0-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)G_\gamma)\Big)\int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\Big(F_1-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_1(\gamma)G_\gamma)\Big)\int\frac{x^{\alpha-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\dots$$
$$\dots\Big(F_{q+z+\gamma-\gamma'-1}(\gamma)-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_{q+z+\gamma-\gamma'-1}(\gamma)G_\gamma)\Big)\int\frac{x^{\alpha-(q+z-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=x^{\alpha-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\Big(\sum_{1}^{t_\gamma}{}_{\nu}\Big(\frac{H_\nu(\gamma)-G_\gamma A_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}\Big)-\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\Big(\frac{A_{\nu,\varrho}G_\gamma}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\Big)\Big).$$

En traitant cette équation comme celle (186.) on trouvera les $m+q+z+\gamma-\gamma'$ équations suivantes:

202. $$\left\{\begin{array}{l}
F_0-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_0(\gamma)G_\gamma)=0,\\
F_1-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_1(\gamma)G_\gamma)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\\
F_{q+z+\gamma-\gamma'-1}-\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}(\tau_{q+z+\gamma-\gamma'-1}(\gamma)G_\gamma)=0,\\
\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma')=0,\\
\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma'+1)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\sum_{1}^{q+z}{}_{\gamma}\sum_{1}^{q}{}_{\varrho}\sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_{\nu}(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(m-\gamma'-1)=0,
\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} H_{t_1}(1) - G_1 A_{t_1}(1) = 0, \\ H_{t_2}(2) - G_2 A_{t_2}(2) = 0, \\ H_{t_3}(3) - G_3 A_{t_3}(3) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ H_{t_{q+z}}(q+z) - G_{q+z} A_{t_{q+z}}(q+z) = 0. \end{cases}$$

Ces équations contiennent les rélations démandées entre les $m+2(z+q)+\gamma-\gamma'$ quantités F_0, F_1, ... $F_{+q+\gamma-\gamma'-1}$, G_1, G_2, ... G_{q+z}, $H_1(1)$, $H_2(1)$, ... $H_{t_1}(1)$, ... $H_{t_{q+z}}(q+z)$.

(La fin dans le cahier prochain.)

6.

Extrait du procès verbal de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg du 24 Septembre (6 Octobre)*).

M. *Fuss* lit une note conçue en ces termes: „Lorsque, il y a seize ans, je fus chargé du secrétariat de l'académie, un de mes premiers soins fut l'inspection de nos archives. J'y trouvai, entre autres, quelques paquets de la correspondance de notre immortel *Euler*, en date pour la plupart, des années quarantièmes et cinquantièmes du siècle dernier, c'est à dire du tems de son service en Prusse; puis quelques lettres des 14 années antérieures à cette époque, et où il appartenait encore à la Russie, mais rien, ou presque rien des vingt dernières années de sa vie qu'il passa de nouveau au sein de notre Académie. Ces lettres étaient rangées par ordre chronologique et formaient une dixaine de paquets isolés. J'y trouvai, comme je devais m'y attendre, au milieu d'une foule de noms obscurs, quelques noms illustres qui, de nos jours encore, brillent d'un éclat impérissable dans les annales des sciences, — au milieu de lettres remplies des phrases banales de l'adulation, d'affaires de service d'un intérêt passager, ou d'objets qui, alors même, n'offraient de l'intérêt qu'aux auteurs de ces lettres, — je trouvai, dis-je, dans toute cette ivraie, un nombre assez considérable de grains précieux qui, aujourd'hui encore, méritent d'être conservés et offerts aux géomètres. Je n'ai qu'à vous citer 10 lettres de *Jean Bernoulli* l'aîné, illustre coïnventeur du calcul infinitésimal, l'ami de *Leibnitz* et le maître de notre *Euler*; 63 lettres de *Daniel Bernoulli*, fils et rival redouté du précédent; 4 lettres de *Nicolas Bernoulli*, cousin-germain de *Daniel*, autour de *l'Ars conjectandi in jure* et qui, avec *Montmort*, cultiva avec tant de succès l'analyse des probabilités dont son oncle *Jacques* avait jeté les premiers fondemens, — 6 lettres de *Gabriel Cramer* de Genève, auteur de l'analyse des lignes courbes algébriques etc. etc.

Ce furent d'abord les lettres des *Bernoulli* qui attirèrent mon attention particulière. Je fus assez heureux pour pouvoir en compléter encore la suite, ayant trouvé, dans les papiers de mon père, les copies, faites de sa main, de quatre lettres de *Jean Bernoulli* et la traduction française d'une lettre de *Daniel*, qui toutes manquent à notre collection, et dont les originaux avaient vraisemblablement été retirés avant même qu'elle fût déposée aux archives, par la famille *Euler*. Il en est de même de deux lettres de *Clairaut*, d'une de *Naudé* et d'une de *Poléni*, dont je possède également des copies de la main de mon père.

Toutes ces lettres roulent sur des objets de science; celles des *Bernoulli* surtout offrent un haut intérêt non seulement pour l'histoire de la science et l'histoire littéraire en général, mais encore sous le rapport des méthodes et des aperçus, du raisonnement et des artifices de calcul que nul géomètre ne verra sans admiration, ni sans

*) Cet extrait a été communiqué à l'éditeur de ce journal par M. *Fuss*, sécretaire perp. de l'académie, avec permission de l'insérer dans le journal des Math.

y puiser quelque instruction. Quant à moi, la jouissance que m'a procurée l'étude de ces lettres n'a été troublée que par le regret, que j'ai éprouvé à chaque page, de ne pas pouvoir lire en même temps les réponses d'*Euler*. A coup sûr, celles-ci eussent décuplé la valeur de cette précieuse collection. Malheureusement tous mes efforts pour me les procurer ont été infructueux (je me suis mis en rapport à cet effet avec l'université de Bâle et avec M. le professeur *Bernoulli* de cette ville, descendant en ligne droite de *Jean* et de *Daniel*). Néanmoins j'ai la conviction que la publication immédiate d'un choix des lettres que nous possédons, sera accueillie avec enthousiasme par tous les géomètres; tel, du moins, a été l'avis de nos collègues de la section mathématique que j'ai consultés à cet égard.

Les lettres des trois *Bernoulli*, avec celles de *Cramer*, de *Lambert* et de *Clairaut* formeront à elles seules un volume de 16 à 20 feuilles environ. — Nos archives renferment en outre tout un volume de lettres de *Goldbach*. Bien que ce géomètre ait joui de son vivant d'une grande réputation, et qu'*Euler* lui-même, ainsi qu'on le voit par un passage remarquable des lettres de *Daniel*, eût beaucoup d'estime et d'amitié pour lui; cependant, l'oubli, dans lequel est tombé son nom, et l'intérêt secondaire qu'offrent ses lettres, — quoique toutes savantes, — m'avait déterminé à ne pas les comprendre dans le recueil que je méditais. Or, je viens d'apprendre qu'il existe aux archives centrales de Moscou plusieurs paquets renfermant les réponses d'*Euler* à *Goldbach*. Cette circonstance change entièrement la face de la question: les réponses d'*Euler* donneront aux lettres de *Goldbach* un degré d'importance que, prises isolément, elles n'avaient pas, et la publication de la correspondance complète de ces deux savans offrira, sans aucun doute, des données fort intéressantes pour l'histoire des mathémathiques en général et pour celle des travaux d'*Euler* en particulier. J'ai l'espoir bien fondé d'obtenir de Moscou soit les lettres originales d'*Euler*, soit la permission d'en faire tirer copie. *)

Depuis que les sciences ont cessé d'être la propriété exclusive d'un petit nombre d'initiés, ce commerce épistolaire des savans a été absorbé par la presse périodique. Le progrès est incontestable. Cependant, cet abandon avec lequel on se communiquait autrefois ses idées et ses découvertes, dans des lettres toutes confidentielles et privées, — on ne le retrouve plus dans les pièces mûries et imprimées. Alors, la vie du savant se reflétait, pour ainsi dire, tout entière dans cette correspondance. On y voit les grandes découvertes se préparer et se développer graduellement; pas un chainon, pas une transition n'y manque; on suit pas à pas la marche qui a conduit à ces découvertes et l'on puise de l'instruction jusque dans les erreurs des grands génies qui

*) Je me félicite de pouvoir ajouter ici, que, grâce à la libéralité éclairée de M. le Prince *Obolensky*, dirigeant les archives de Moscou, je me trouve, dans ce moment, dépositaire de *cent* lettres d'*Euler* à *Goldbach*, toutes pleines de recherches importantes sur différents sujets de la science, et particulièrement sur la théorie des nombres. La lecture de cette correspondance me fait encore plus vivement regretter la perte des lettres d'*Euler* aux *Bernoulli*. Si, par un heureux hasard, elle se retrouvaient quelque part, soit dans une collection publique, soit entre des mains privées, que cette annonce puisse servir aux personnes qui en seraient dépositaires, ou qui seulement en auraient connaissance, d'invitation à m'en donner avis! Ce 2 (14) novembre 1841. *Fuss.*

en furent les auteurs. Cela explique suffisamment l'intérêt qui se rattache à ces sortes de correspondances, et me fait espérer que l'Académie voudra bien m'autoriser à livrer à l'impression un *Choix de lettres inédites de quelques célèbres Géomètres du 18ème siècle à Léonard Euler.* — On sait qu'une entreprise tout à fait analogue et relative aux écrits et à la correspondance de *Leibnitz,* se prépare, dans ce moment, en Allemagne.

Si l'académie veut bien entrer dans mes vues, je me permettrai d'appeler encore son attention sur un autre projet qui m'a été suggéré par M. *Jacobi* de Königsberg, et qui se lie fort intimément à celui que je viens de lui soumettre. M. *Jacobi* m'engage à publier de nouveau la liste des écrits d'*Euler,* fournie par mon père à la suite de son *Eloge,* et d'y indiquer les volumes de nos Mémoires, où sont insérées les 183 dissertations posthumes de ce grand géomètre, marquées dans l'Eloge comme inédites. Ce désir de notre savant collègue m'a rappelé un travail qu'en 1817 et 1818, j'avais exécuté pour mon propre usage, savoir un catalogue systématique de tous les écrits d'*Euler,* avec renvoi aux recueils académiques qui les renferment. J'ajouterai pour ceux de mes collègues qui ne sont pas mathématiciens, que le nombre de ces écrits, non compris les grands ouvrages publiés séparément, monte à plus de 700, et qu'aujourd'hui encore, 60 ans après la mort de ce grand homme, nul géomètre ne peut se dispenser de recourir souvent à ses travaux. Or, une pareille liste systématique et chronologique doit nécessairement faciliter beaucoup la recherche des pièces dont on se trouve avoir besoin. J'ai donc soumis mon travail à une nouvelle révision, et après l'avoir complété, j'ai le projet de le placer en tête du recueil épistolaire ci-dessus mentionné et d'y joindre une notice sur les écrits d'*Euler.* Car j'ai trouvé que certains mémoires, marqués comme inédits dans la liste, donnée par mon père dans son *Eloge d'Euler,* ont vraisemblablement, plus tard, été retirés de nos archives, car ils ne s'y retrouvent plus; d'autres, publiés depuis, manquent dans la liste. Il y en a d'autres encore qui, à dessein, n'ont pas été publiés, soit parcequ'ils sont apostillés de la main de mon père „*à supprimer*", soit parceque leur origine a paru douteuse. Enfin, en examinant les manuscrits d'*Euler* que renferment nos archives et ceux que je possède moi-même, mon catalogue systématique doit me fournir un moyen facile de déterminer au juste lesquels de ces manuscrits n'ont jamais été publiés, car la liste des mémoires inédits d'*Euler,* fournie par mon père, ne pouvait se rapporter qu'à ceux qui avaient été *présentés à l'Académie* de son vivant. C'est ainsi, p. ex., qu'une inspection toute superficielle me permet déjà de désigner positivement comme inédit un fragment volumineux, mais mis au net par *Euler* même, sous le titre d'*Astronomia mechanica.* Je ne doute pas qu'il ne s'en trouve d'autres encore, et alors il s'agira de savoir si tous ses travaux, ou seulement quelques uns d'entre eux se prêtent à la publication, question que l'Academie voudra bien soumettre à la décision d'une commission. MM. *Struve, Ostrogradsky* et *Bouniakovsky* ont bien voulu me promettre d'avance leur assistance éclairée."

L'Académie approuve ce projet et autorise M. *Fuss* à le mettre à exécution.

7.

Unedirter Brief des berühmten Mathematikers Joh. Bernoulli (geb. 1667, gest. 1748) an Leonhard Euler in St. Petersburg, datirt aus

Basel, den 11ten Aug. 1731.

Clarissime et Doctissime Domine Professor.

Amice Carissime.

Dessen letzteres vom 25. Mai ist mir von Seinem Herrn Vatter zurecht überlieffert worden; Er hat nicht nöthig sich wegen Saumseligkeit im Schreiben zu excusiren, da ich selbsten eine Antwort schuldig wäre: hoffe aber Er werde mir zu gut halten, was ich bissorts an meiner Pflicht etwas lasse abgehen, in Betrachtung meiner vielfältigen Occupationen, sonderlich bei dem mir neulich aufgetragenen, oder vielmehr aufgedrungenen Decanats, welches mir in meinem angehenden hohen Alter sehr beschwerlich ist.

Es ist mir sehr lieb gewesen zu vernehmen, daß der Herr Prof. an Verfertigung eines Systematis Musici (welches fast zu Ende soll gekommen sein) arbeitet*); ich zweifle nicht, es werde ein schönes Werk zu Tage kommen, so des Auctors fürtreffliches ingenium sattsam zeigen wird; Ich kann mir leicht einbilden, daß dergleichen opus kaum wird gefunden werden, darin alles auß mathematischen Gründen hergeholet ist, da wenig Scriptores Musici oder wohl gar keine zu finden sind, welche mit so großer und außbündiger mathematischer Wissenschaft begaabet sind, wie der Hr. Professor ist, deßwegen mich sehr verlangt Sein Werk selbsten dermahleneins zu sehen. Ich könnte zwar nicht leicht errathen, worin derjenige Grundsatz bestehe, so metaphysisch seyn solle, wie Er sagt, dadurch die Ursach könnte gegeben werden, warum einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne, und daß uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme: Man hat zwar eine General-idée von der Harmonie, daß sie lieblich ist, wenn sie wohl eingerichtet und die consonanzen wohl menagirt seind, denn, wie bekandt, so haben auch die dissonanzen in der Music ihren Gebrauch, damit die Lieblichkeit der gleich darauf folgenden consonanzen desto besser herauskomme, nach dem gemeinen Sprichwort opposita juxta se posita magis elucescunt; also verhält sich es auch mit dem Schatten in der Mahlereykunst, welcher das Licht releviren muß. Es kommt, glaub ich, in musica practica meistens auf die Art und modification an, daran man gewöhnt ist, und diese Art dependiret viel von dem naturel und temperament der Leute, deren einige dieses, andere ein anderes für süß und angenehm halten; also ist die Italienische Music-Art discrepant von der Französischen, und diese von der Englischen. Mit einem Wort de gustibus non est disputandum. Wenn hiemit die Lieblichkeit eines Musicstückes in der natur selbsten soll gegründet seyn, so muß man

*) Tentamen novae theoriae Musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae 1. Bd. in 4to erschien in St. Petersburg 1739.

wohl definiren, was man durch Lieblichkeit verstehe und nicht sagen: dies oder jenes ist lieblich, weil es mir gefällt, denn eben dieses könnte einem andern mißfallen; zum exempel dem Midae hatte des Pans Schnaber-Music besser gefallen, als des Apollinis Harfenklang. Der Hr. Prof. sagt, man könne urtheilen von dem Wohlgefallen oder Mißfallen der viel zusammengefügten Töne, wenn man die Verhältniß der Höhe und Tiefe derselben, nämlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, ansiehet; daraus habe Er die Regeln gezogen, wie die Töne müssen zusammengefügt werden, daß sie ein verständiges Ohr belustigen können. Dieses lasse ich gelten für einen Meister, der mehr auf die accuratesse eines Musicstückes Achtung gibt, als auf den effect, den es auf die Zuhörer thut; ein Solcher wird sich ohne Zweifel daran ergötzen und belustigen, wenn er es nur auf dem Papier geschrieben siehet und examiniret, und befindet, daß es nach den Grundregeln wohl componirt ist; aber da ein Musicstück meistens gespielt wird vor unverständigen Ohren, welche die rationem intervallorum pulsuum der Saiten nicht einsehen, viel weniger zählen können, so wird, glaube ich, dergleichen Ohren das Musicstück entweder gefallen oder mißfallen, je nachdem sie an diese oder jene Gattung der Music gewöhnt sind. Im übrigen gefällt mir sein dessein ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionnirt und gewiesen wird, daß ein Mathematicus schier alle Wißenschaften auszuführen im Stande ist, da hingegen andere Meister, die nur Practici seind, von ihrer eigenen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein blinder von der Farb.

Wenn dieser Tractatus Musices zu End seyn wird, wird der Hr. Professor seine vorhabende Mechanicam*) (von deren mir ist geschrieben worden) ohne Zweifel mit Ernst für die Hand nehmen von deren ich mir etwas Sonderbares promittire darzu ich denn beharrliche Gesundheit von Herzen anwünsche. Verbleibe indessen unter Empfehlung Göttl. protection des hochgeehrten Hrn. Professors

bereitwilligster J. Bernoulli Dr.

(St. Petersb. Ztg. 1841, No. 27.)

*) Erschien schon 1736 unter dem Titel Mechanica sive motus scientia analytice exposita 2. Bd. in 4to.

Facsimile einer Handschrift von Lambert.

Astronomy explain'd upon Sir Isaac Newton's Principles of James Ferguson 4°. London.

Bestimmung der Zeit d. Geburt Christi.

In Proph. Danj. cap. IX wird das Jahr des Todes Christi bestimmt. Es fällt in die Mitte d. letzten Jahrwoche, und folglich ins 4te Jahr dieser Woche.

Der Messias tritt sein Lehramt nach d. Taufe an, folglich im 30ten Jahre Luc. 3. 30.

Also fällt d. Tod Christi genau ins 33 Jahr seines Alters und ins 4te seines Lehramtes.

Die Juden haben Menses lunares u. annos Solares.

Christus starb den Abend vor dem Sabbat d. Juden, und folglich am Freytag. Und daher fiel d. Ostermond auf d. Freytag. Denn d. Freytag war d. 15te mensis Nisan; folglich der 14te [illegible] der Freytag. Wenn man nun um diese Zeit nachrechnet, in welchen Jahren d. Ostermond auf d. Freytag hat fallen können, so findet man daß d. [illegible] seit 20 Jahr vor Christi Geburt bis 60 Jahr nach derselben nur ein einziges Mal, und zwar in specie anno Christi 33 geschehen.



8.

Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}}dx$.

(Par Mr. *O. J. Broch*, Candidat en philosophie de Norvège.)

(Fin du No. 5. dans le cahier précédent.)

Chapitre 4.

Sur la réduction des intégrales de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ par eux mêmes et par des fonctions logarithmiques.

Comme nous venons de le voir l'intégrale $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, $\mathfrak{F}(x^p)$ y désignant une fonction algébrique quelconque, peut être réduite par des fonctions algébriques aux $m+1+\gamma-\gamma'$ intégrales suivantes:

$$\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad \int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad \ldots$$
$$\ldots\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}.\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},$$

et ces intégrales sont en général irréductibles par des fonctions algébriques. Nous allons maintenant chercher les rélations des intégrales entre elles qu'on peut obtenir par des fonctions logarithmiques.

Pour cela il faut chercher la fouction logarithmique la plus générale dont la différentielle est décomposable en termes de la forme

$$\int\frac{x^{\varpi p+s-1}.\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}\quad\text{et}\quad\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.\,dx}{(x^p-g^p)^{m_1}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.$$

Cette fonction logarithmique doit, comme on le voit aisément, avoir la forme suivante:

$$203.\quad T = \sum_1^{\mu}{}_{\mu}\left[A_{\mu}\log\sum_0^{n-1}{}_{\nu}\left(f_{\nu,\mu}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{\nu}}\right)\right],$$

$f_{\nu,\mu}(x)$ étant une fonction entière de x et A_{μ} une constante, ou, en supposant pour abréger,

$$204.\quad B_{\varrho,\mu}(x) = \sum_0^{n-1}{}_{\nu}\left(c_{\varrho}^{\nu} f_{\nu,\mu}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{\nu}}\right),$$

c_{ϱ} étant une des valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$ et $c_1 = 1$:

$$205.\quad T = \sum_1^{\mu}{}_{\mu}(A_{\mu}\log B_{1,\mu}(x)).$$

De là on trouve:

$$206.\quad dT = \sum_1^{\mu}{}_{\mu}\frac{A_{\mu}.dB_{1,\mu}(x)}{B_{1,\mu}(x)}.$$

Maintenant tous les termes de dT doivent être de la forme $\dfrac{x^{s-\gamma p-1}M\,dx}{N\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, M et N étant des fonctions entières de x^p. On doit donc faire abstraction des termes dans le second membre de l'équation (206.) qui ne sont pas de cette forme. En désignant par $\varrho_{\nu}(y)$ le coëfficient de $\dfrac{1}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{\nu}}}$ dans le développement de y, chaqu'un des autres termes doit être de la forme suivante:

$$207.\quad \frac{A}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.\varrho_s\left(\frac{dB_1(x)}{B_1(x)}\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.\varrho_0\left(\frac{dB_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_1(x)}\right) = \frac{A}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.\varrho_0\left(\frac{dB_2(x).c_2^s\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_2(x)}\right)$$

$$= \dots\frac{A}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.\varrho_0\left(\frac{dB_n(x)\,c_n^s\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_n(x)}\right)$$

$$= \frac{A}{n.\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}.\varrho_0\left(\sum_1^n{}_{\nu}\frac{c_{\nu}^s dB_{\nu}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_{\nu}(x)}\right) = \frac{A\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{n.\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}\sum_1^n{}_{\nu}\left(\frac{c_{\nu}^s dB_{\nu}(x)}{B_{\nu}(x)}\right)$$

$$= \frac{A}{n}\sum_1^n{}_{\nu}\left(\frac{c_{\nu}^s dB_{\nu}(x)}{B_{\nu}(x)}\right);$$

car $\sum_1^n{}_{\nu}\left(\dfrac{c_{\nu}^s dB_{\nu}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_{\nu}(x)}\right)$, comme fonction symmétrique des racines de l'équation $y^n - R(x^p) = 0$, est une fonction rationnelle de x. On doit

donc avoir, en posant A_μ au lieu de $\frac{A_\mu}{n}$

$$208.\qquad dT = \sum_1^{\mu}{}_{\mu}\left[A_\mu \sum_1^{n}{}_{\nu}\left(\frac{c_\nu^s\, dB_{\nu,\mu}(x)}{B_{\nu,\mu}(x)}\right)\right]$$

et

$$209.\qquad T = \sum_1^{\mu}{}_{\mu}\left[A_\mu \sum_1^{n}{}_{\nu}\left(c_\nu^s \log B_{\nu,\mu}(x)\right)\right].$$

En considérant maintenant un terme particulier du second membre de l'équation (208.) on voit qu'on doit avoir:

$$210.\qquad \frac{x^{s-\gamma p-1}M\,dx}{N\sqrt[n]{(R(x^p))^s}} = A\sum_1^{n}{}_{\nu}\frac{c_\nu^s\, dB_\nu(x)}{B_\nu(x)},$$

M et N étant des fonctions entières de x^p. En multipliant les deux membres de cette équation par $\sqrt[n]{(R(x^p))^s}$ et en ayant égard à l'équation (207.) on trouvera:

$$211.\qquad \frac{M.x^{s-\gamma p-1}}{N} = A\sum_1^{n}{}_{\nu}\frac{dB_\nu(x)}{dx}.\frac{c_\nu^s\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{B_\nu(x)} = nA\varrho_s\left(\frac{dB_1(x)}{B_1(x)dx}\right)$$
$$= \frac{nA\varrho_s\left(B_2(x).B_3(x)\ldots.B_n(x).\frac{dB_1(x)}{dx}\right)}{B_1(x).B_2(x)\ldots.B_n(x)}.$$

En désignant par $\sigma_\nu(y)$ le coëfficient de $\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}$ dans le développement de y, et en remarquant que

$$212.\qquad \varrho_s(y) = R(x^p)\,\sigma_{n-s}(y),$$

on aura

$$213.\qquad \frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N} = \frac{n.A.R(x^p)\,\sigma_{n-s}\left(B_2(x).B_3(x)\ldots.B_n(x).\frac{dB_1(x)}{dx}\right)}{B_1(x).B_2(x)\ldots.B_n(x)}.$$

Mais:

$$214.\qquad \sigma_{n-s}(y.z) = \sum_1^{2}{}_q\sum_0^{n-1}{}_\nu (R(x^p))^{q-1}\left(\sigma_\nu(y).\sigma_{qn-s-\nu}(z)\right);$$

donc:

$$215.\qquad \frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}$$
$$= \frac{nA\sum_1^{2}{}_q\sum_2^{n-1}{}_\nu\left((R(x^p))^q.\sigma_\nu(B_2(x).B_3(x)\ldots.B_n(x)).\sigma_{qn-s-\nu}\frac{dB_1(x)}{dx}\right)}{B_1(x).B_2(x)\ldots.B_n(x)}$$

ou, en supposant pour abréger:

$$216.\quad \sigma_\nu(B_2(x).B_3(x)\dots B_n(x)) = S_\nu(x):$$

$$217.\quad \frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}$$

$$=\frac{nA\sum_1^2{}_q\sum_0^{n-1}{}_\nu\Big((R(x^p))^{q-1}.S_\nu(x).\Big(R(x^p)\frac{df_{qn-s-\nu}(x)}{dx}+\frac{qn-s-\nu}{n}f_{qn-s-\nu}(x)\frac{dR(x^p)}{dx}\Big)\Big)}{B_1(x).B_2(x)\dots B_n(x)}.$$

Donc, parceque le nominateur et le dénominateur du second membre de cette équation sont des fonctions entières de x, on a

$$218.\quad x^{s-\gamma p-1}M$$

$$=nA\sum_1^2{}_q\sum_0^{n-1}{}_\nu\Big((R(x^p))^{q-1}.S_\nu(x).\Big(R(x^p)\frac{df_{qn-s-\nu}(x)}{dx}+\frac{qn-s-\nu}{n}f_{qn-s-\nu}(x).\frac{dR(x^p)}{dx}\Big)\Big)$$

$$=nA\Big[S_{n-s}(x).R(x^p)\frac{df_0(x)}{dx}+S_{n-s-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+\dots$$

$$\dots S_0(x)R(x^p)\frac{df_{n-s}(x)}{dx}+S_{n-1}(x)(R(x^p))^2\frac{df_{n-s+1}(x)}{dx}+\dots$$

$$\dots S_{n-s+1}(x)(R(x^p))^2\frac{df_{n-1}(x)}{dx}$$

$$+\frac{1}{n}\Big((n-s)S_0(x)f_{n-s}(x)+(n-s-1)S_1(x)f_{n-s-1}(x)+\dots$$

$$\dots S_{n-s-1}(x)f_1(x)+(n-1)S_{n-s+1}(x)f_{n-1}(x)R(x^p)+\dots$$

$$\dots(n-s+1)S_{n-1}(x)f_{n-s+1}R(x^p)\Big)\frac{dR(x^p)}{dx}\Big],$$

$$219.\quad N = B_1(x).B_2(x)\dots B_n(x)$$

$$=(f_0(x)+f_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+\dots f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}})$$

$$\times(S_0(x)+S_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+\dots S_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}})$$

$$=S_0(x)f_0(x)+S_{n-1}(x)f_1(x)R(x^p)+S_{n-2}(x)f_2(x)R(x^p)+\dots$$

$$\dots S_1(x)f_{n-1}(x)R(x^p).$$

En différentiant cette dernière équation on obtient:

$$220.\quad dN=\sum_1^n{}_\varrho\sum_0^{n-1}{}_\nu\Big(\frac{N.c_\varrho^\nu\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}\,df_\nu(x)}{B_\varrho(x)}+\frac{\nu N.c_\varrho^\nu\sqrt[n]{(R(x^p))^\nu}f_\nu(x).dR(x^p)}{nR(x^p)B_\varrho(x)}\Big).$$

On a maintenant:

$$221.\quad S_\mu(x) = \sigma_\mu(B_2(x).B_3(x)\dots B_n(x))$$

$$=\frac{1}{c_1^\mu}\sigma_\mu\Big(\frac{N}{B_1(x)}\Big)=\frac{1}{c_2^\mu}\sigma_\mu\Big(\frac{N}{B_2(x)}\Big)=\dots\frac{1}{c_n^\mu}\sigma_\mu\Big(\frac{N}{B_n(x)}\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\varrho\Big(\frac{1}{c_\varrho^\mu}.\sigma_\mu\Big(\frac{N}{B_\varrho(x)}\Big)\Big)=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\varrho\,\sigma_0\Big(\frac{c_\varrho^{n-\mu}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\mu}}.N}{B_\varrho(x).R(x^p)}\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\varrho\Big(\frac{c_\varrho^{n-\mu}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\mu}}.N}{B_\varrho(x).R(x^p)}\Big).$$

Donc:

$$222. \quad \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\left(\frac{N c_{\varrho}^{\nu} \sqrt[n]{(R(x^p))^{\nu}}}{B_{\varrho}(x)}\right) = n R(x^p) S_{n-\nu}(x),$$

et en substituant dans l'équation (220.):

$$223. \quad dN = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}(n . R(x^p) S_{n-\nu}(x)\, df_{\nu}(x) + \nu f_{\nu}(x)\, S_{n-\nu}(x)\, dR(x^p))$$
$$= n(S_0(x)\, df_0(x) + S_{n-1}(x) R(x^p)\, df_1(x) + S_{n-2}(x) R(x^p)\, df_2(x) + \dots$$
$$\dots + S_1(x) R(x^p)\, df_{n-1}(x))$$
$$+ (S_{n-1}(x) f_1(x) + 2 S_{n-2}(x) f_2(x) + 3 S_{n-3}(x) f_3(x) + \dots$$
$$\dots + (n-1) S_1(x) f_{n-1}(x))\, dR(x^p).$$

Maintenant la fonction $(S_{n-z}(x) . S_{n-y}(x) - S_{n-z-a}(x) . S_{n-y+a}(x))$ est divisible par N toutes les fois que $n-y+a<n$; et la fonction $R(x^p)(S_{n-z}(x) . S_{n-y}(x) - S_{n-z-a}(x) . S_{n-y+a}(x))$ est divisible par N toutes les fois que $n-y+a =$ ou $> n$. En effet on aura en substituant les valeurs de $S_{n-z}(x)$, $S_{n-y}(x)$, $S_{n-z-a}(x)$, $S_{n-y+a}(x)$, déterminées par l'équation (221.):

$$224. \quad \frac{S_{n-z}(x) . S_{n-y}(x) - S_{n-z-a}(x) . S_{n-z+a}(x)}{N}$$

$$= \frac{N}{n^2 (R(x))^2} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\left(\frac{c_{\nu}^{z} c_{\varrho}^{y} \sqrt[n]{(R(x^p))^{z+y}}}{B_{\nu}(x) . B_{\varrho}(x)} - \frac{c_{\nu}^{z+a} . c_{\varrho}^{y-a} \sqrt[n]{(R(x^p))^{z+y}}}{B_{\nu}(x) . B_{\varrho}(x)}\right)$$
$$= \frac{1}{n^2 (R(x^p))^2}\left(\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\left(B_1(x) . B_2(x) \dots . B_{\nu-1}(x) . B_{\nu+1}(x) \dots . B_{\varrho-1}(x) . B_{\varrho+1}(x) \dots\right.\right.$$
$$\dots B_n(x)\, c_{\nu}^{z} c_{\varrho}^{y} \sqrt[n]{(R(x^p))^{z+y}}$$
$$- B_1(x) . B_2(x) \dots . B_{\nu-1}(x) . B_{\nu+1}(x) \dots . B_{\varrho-1}(x) . B_{\varrho+1}(x) \dots$$
$$\left.\left.\dots B_n(x) . c_{\nu}^{z+a} . c_{\varrho}^{y-a} \sqrt[n]{(R(x^p))^{z+y}}\right)\right).$$

Or la partie du second membre de cette équation renfermée dans les parenthèses est une fonction symmétrique des racines de l'équation $y^n - R(x^p) = 0$; donc elle est une fonction rationnelle et entière de x, parceque les termes fractionnaires qui se presentent si $\nu = \varrho$ s'anéantissent. De plus elle est divisible par $n^2 (R(x^p))^2$ si $n-y+a<n$, et par $n^2 R(x^p)$ si $n-y+a =$ ou $>n$ parceque en vertu de l'équation (221.) $\sum_{1}^{n}{}_{\varrho} \frac{c_{\varrho}^{n-\mu} \sqrt[n]{(R(x^p))^{n-\mu}}}{B_{\varrho}(x)}$ doit être divisible par $R(x^p)$, N ne l'étant pas. Si donc $n-y+a<n$, la fonction

$S_{n-z}(x).S_{n-y}(x) - S_{n-z-a}(x).S_{n-y+a}(x)$ est divisible par N, et si $n-y+a = $ ou $> n$, $(S_{n-z}(x).S_{n-y}(x) - S_{n-z-a}(x).S_{n-y+a}(x))R(x^p)$ est divisible par N. Supposons maintenant:

$$225. \quad \frac{S_\mu(x).S_{\varrho-s}(x) - S_{\mu-s}(x).S_\varrho(x)}{N} = D_\varrho(x),$$

où $D_\varrho(x)$ devient une fonction entière de x. On trouve par là les équations suivantes, en remarquant qu'en vertu de l'équation (221.) $S_{n+\gamma}(x)R(x^p) = S_\gamma(x)$ et par suite $D_{n+\gamma}(x)R(x^p) = D_\gamma(x)$:

$$226. \quad S_{n-s}(x).R(x^p)\frac{df_0(x)}{dx}$$

$$= \frac{N.D_0(x)\frac{df_0(x)}{dx} + S_{\mu-s}(x)S_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}}{S_\mu(x)},$$

$$227. \quad S_{n-s-\gamma}(x).R(x^p)\frac{df_\gamma(x)}{dx}$$

$$= \frac{NR(x^p).D_{n-\gamma}(x)\frac{df_\gamma(x)}{dx} + R(x^p)S_{\mu-s}(x)S_{n-\gamma}(x)\frac{df_\gamma(x)}{dx}}{S_\mu(x)},$$

$$228. \quad S_{n-s+\gamma}(x).(R(x^p))^2\frac{df_\gamma(x)}{dx}$$

$$= \frac{NR(x^p).D_{n-\gamma}(x)\frac{df_\gamma(x)}{dx} + R(x^p)S_{\mu-s}(x)S_{n-\gamma}(x)\frac{df_\gamma(x)}{dx}}{S_\mu(x)},$$

$$229. \quad (n-s-\gamma)S_\gamma(x)f_{n-s-\gamma}(x)$$

$$= \frac{(n-s-\gamma)N.D_{s+\gamma}(x)f_{n-s-\gamma}(x) + (n-s-\gamma)S_{\mu-s}(x)S_{s+\gamma}(x)f_{n-s-\gamma}(x)}{S_\mu(x)},$$

$$230. \quad (n-s+\gamma)S_{n-\gamma}(x).f_{n-s+\gamma}(x)R(x^p)$$

$$= \frac{(n-s+\gamma)N.D_{s-\gamma}(x)f_{n-s+\gamma}(x) + (n-s+\gamma)S_{\mu-s}(x)S_{s-\gamma}(x)f_{n-s+\gamma}(x)}{S_\mu(x)}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (218.) on obtiendra:

$$
\begin{aligned}
x^{\lambda-\gamma p-1}M = nA\Bigg[& \frac{ND_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)\,S_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}}{S_\mu(x)} \\
& + \frac{ND_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)S_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}}{S_\mu(x)} + \dots \\
& + \frac{ND_s(x)R(x^p)\frac{df_{n-s}(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)S_s(x)R(x^p)\frac{df_{n-s}(x)}{dx}}{S_\mu(x)} \\
& + \frac{ND_{s-1}(x)R(x^p)\frac{df_{n-s+1}(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)S_{s-1}(x)R(x^p)\frac{df_{n-s+1}(x)}{dx}}{S_\mu(x)} \\
& + \frac{ND_{s-2}(x)R(x^p)\frac{df_{n-s+2}(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)S_{s-2}(x)R(x^p)\frac{df_{n-s+2}(x)}{dx}}{S_\mu(x)} + \dots \\
& + \frac{ND_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}+S_{\mu-s}(x)S_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}}{S_\mu(x)} \\
& + \frac{1}{n}\Bigg(\frac{(n-s)ND_s(x)f_{n-s}(x)+(n-s)S_{\mu-s}(x)S_s(x)f_{n-s}(x)}{S_\mu(x)} \\
& \quad + \frac{(n-s-1)ND_{s+1}(x)f_{n-s-1}(x)+(n-s-1)S_{\mu-s}(x)S_{s+1}(x)f_{n-s-1}(x)}{S_\mu(x)} + \dots \\
& \quad + \frac{ND_{n-1}(x)f_1(x)+S_{\mu-s}(x)S_{n-1}(x)f_1(x)}{S_\mu(x)} \\
& \quad + \frac{(n-1)ND_1(x)f_{n-1}(x)+(n-1)S_{\mu-s}(x)S_1(x)f_{n-1}(x)}{S_\mu(x)} \\
& \quad + \frac{(n-2)ND_2(x)f_{n-2}(x)+(n-2)S_{\mu-s}(x)S_2(x)f_{n-2}(x)}{S_\mu(x)} + \dots \\
& \quad + \frac{(n-s+1)ND_{s-1}(x)f_{n-s+1}(x)+(n-s+1)S_{\mu-s}(x)S_{s-1}(x)f_{n-s+1}(x)}{S_\mu(x)}\Bigg)\frac{dR(x^p)}{dx}\Bigg] \\
= A. & \frac{nN\left(D_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}+D_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+\dots D_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}+\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}_\nu\left(\nu D_{n-\nu}(x)f_\nu(x)\right)\frac{dR(x^p)}{dx}\right)}{S_\mu(x)} \\
+ A & \frac{S_{\mu-s}(x)\left[n\left(S_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}+S_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+\dots S_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}\right)+\sum_1^{n-1}{}_\nu(\nu S_{n-\nu}(x)f_\nu(x))\frac{dR(x^p)}{dx}\right]}{S_\mu(x)},
\end{aligned}
$$

et en substituant dans le dernier membre la valeur de $\frac{dN}{dx}$ donnée par l'équation (223.), on aura:

$$232.\quad x^{s-\gamma p-1}M = \frac{nN\left[D_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}+D_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+\dots D_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}+\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}_{\nu}(\nu D_{n-\nu}(x)f_\nu(x))\frac{dR(x^p)}{dx}+S_{\mu-s}(x)\frac{dN}{dx}\right]}{S_\mu(x)}.$$

μ étant arbitraire.

Si donc $(x^p-a^p)^q$ est un diviseur de N, $(x^p-a^p)^{q-1}$ doit être un diviseur de $x^{s-\gamma p-1}M$ à moins que toutes les quantités $S_\mu(x)$ ne soient pas divisible par $(x^p-a^p)^t$. Mais si cela est la quantité:

$$D_0(x)\frac{df_0(x)}{dx}+D_{n-1}(x)R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx}+\dots D_1(x)R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx}+\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}_{\nu}(\nu D_{n-\nu}(x)f_\nu(x))\frac{dR(x^p)}{dx}$$

sera divisible par $(x^p-a^p)^{t-1}$ En effet on a, parceque:

$$N=\left(f_0(x)+f_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+\dots f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}}\right)\left(S_0(x)+S_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+\dots\right.$$
$$\left.\dots S_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}}\right)$$

est une fonction rationnelle de x:

$$233.\quad S_\varrho(x)f_0(x)+S_{\varrho-1}(x)f_1(x)+\dots S_0(x)f_\varrho(x)+S_{n-1}(x)R(x^p)f_{\varrho+1}(x)+\dots$$
$$\dots S_{\varrho+1}(x)R(x^p)f_{n-1}(x) = 0,$$

ϱ étant un nombre entier quelconque plus grand que zéro et plus petit que n. Par cette équation et par les équations (219 et 225.) on voit aisément que:

$$234.\quad\begin{cases} D_0(x)f_0(x)+D_{n-1}(x)f_1(x)R(x^p)+D_{n-2}(x)f_2(x)R(x^p)+\dots \\ \qquad\dots D_1(x)f_{n-1}(x)R(x^p) = -S_{\mu-s}(x), \\ D_s(x)f_0(x)+D_{s-1}(x)f_1(x)+\dots D_0(x)f_s(x)+D_{n-1}(x)f_{s+1}(x)R(x^p)+\dots \\ \qquad\dots D_{s+1}(x)f_{n-1}(x)R(x^p) = S_\mu(x), \\ D_\varrho(x)f_0(x)+D_{\varrho-1}(x)f_1(x)+\dots D_0(x)f_\varrho(x)+D_{n-1}(x)f_{\varrho+1}(x)R(x^p)+\dots \\ \qquad\dots D_{\varrho+1}(x)f_{n-1}(x)R(x^p) = 0, \end{cases}$$

ϱ étant ni $=s$ ni $=0$.

De là on obtiendra, en supposant pour abréger,

$$235.\quad U_\varrho(x) = D_0(x)+c_\varrho D_1(x)\sqrt[n]{(R(x^p))}+c_\varrho^2 D_2(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^2}+\dots$$
$$\dots c_\varrho^{n-1}D_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-1}};$$

$$236.\quad U_\varrho(x).B_\varrho(x) = c_\varrho^s S_\mu(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}-S_{\mu-s}(x).$$

Si maintenant les quantités $S_\mu(x)$ et $S_{\mu-s}(x)$ sont divisibles par $(x^p-a^p)^t$ toutes les deux, on aura:

$$237. \quad \begin{cases} U_\varrho(a) \cdot B_\varrho(a) = 0, \\ \dfrac{d(U_\varrho(a) \cdot B_\varrho(a))}{da} = B_\varrho(a) \cdot \dfrac{dU_\varrho(a)}{da} + U_\varrho(a) \cdot \dfrac{dB_\varrho(a)}{da} = 0, \\ \dfrac{d^2(U_\varrho(a) \cdot B_\varrho(a))}{da^2} = B_\varrho(a) \cdot \dfrac{d^2 U_\varrho(a)}{da^2} + \dfrac{2dB_\varrho(a) \cdot dU_\varrho(a)}{da^2} + U_\varrho(a) \cdot \dfrac{d^2 B_\varrho(a)}{da^2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{t-1}(U_\varrho(a) \cdot B_\varrho(a))}{da^{t-1}} = B_\varrho(a) \cdot \dfrac{d^{t-1} U_\varrho(a)}{da^{t-1}} + \dfrac{(t-1)dB_\varrho(a) \cdot d^{t-2} U_\varrho(a)}{da^{t-1}} + \ldots \\ \qquad \ldots U_\varrho(a) \cdot \dfrac{d^{t-1} B_\varrho(a)}{da^{t-1}} = 0. \end{cases}$$

De là on voit qu'on aura toujours un nombre k égal à t ou moindre que t, tel que:

$$238. \quad \begin{cases} U_\varrho(a) = 0, & B_\varrho(a) = 0, \\ \dfrac{dU_\varrho(a)}{da} = 0, & \dfrac{dB_\varrho(a)}{da} = 0, \\ \dfrac{d^2 U_\varrho(a)}{da^2} = 0, & \dfrac{d^2 B_\varrho(a)}{da^2} = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d^{k-1} U_\varrho(a)}{da^{k-1}} = 0, & \dfrac{d^{t-k-1} B_\varrho(a)}{da^{t-k-1}} = 0. \end{cases}$$

Donc $U_\varrho(a) \cdot \dfrac{dB_\varrho(a)}{da}$ et ses $t-2$ premiers coëfficiens différentiels seront égaux à zéro. De plus on a:

$$239. \quad \sigma_0\left(\frac{U_1(a) \cdot dB_1(a)}{da}\right) = \sigma_0\left(\frac{U_2(a) \cdot dB_2(a)}{da}\right) = \ldots\ldots = \sigma_0\left(\frac{U_n(a) \cdot dB_n(a)}{da}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sigma_0\left(\frac{U_1(a) \cdot dB_1(a) + U_2(a) \cdot dB_2(a) + \ldots\ldots U_n(a) \cdot dB_n(a)}{da}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{U_1(a) \cdot dB_1(a) + U_2(a) \cdot dB_2(a) + \ldots\ldots U_n(a) \cdot dB_n(a)}{da}\right).$$

Donc $\sigma_0\left(\dfrac{U_1(a) \cdot dB_1(a)}{da}\right)$ et ses $t-2$ premiers coëfficiens différentiels seront égaux à zéro, et par conséquent $\sigma_0\left(\dfrac{U_1(x) \cdot dB_1(x)}{dx}\right)$ est divisible par $(x^p - a^p)^{t-1}$. Maintenant on voit par l'équation (235.) que:

$$240. \quad \sigma_0\left(\frac{U_1(x) \cdot dB_1(x)}{dx}\right) = D_0(x)\frac{df_0(x)}{dx} + D_{n-1}(x) R(x^p) \frac{df_1(x)}{dx} + \ldots$$
$$\ldots D_1(x) R(x^p) \frac{df_{n-1}(x)}{dx} + \frac{1}{n}\sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\nu f_\nu(x) D_{n-\nu}(x) \frac{dR(x^p)}{dx}\right).$$

Donc le second membre de cette équation sera divisible par $(x^p-a^p)^{t-1}$. Le nominateur du second membre de l'équation (232.) sera divisible par $(x^p-a^p)^{q+t-1}$ et le dénominateur par $(x^p-a^p)^t$, donc enfin $x^{s-\gamma p-1}M$ sera toujours divisible par $(x^p-a^p)^{q-1}$, N étant divisible par $(x^p-a^p)^q$. De là il suit que $\frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}$ ne peut pas avoir aucun terme de la forme: $\frac{Ax^{s-\gamma p-1}}{(x^p-a^p)^q}$, q étant plus grand que l'unité. De plus si $(x^p-a^p)^r$ était un facteur de $R(x^p)$ et $(x^p-a^p)^{r+\alpha}$ un facteur de N, $(x^p-a^p)^{r+\alpha}$ deviendroit aussi un facteur de $x^{s-\gamma p-1}M$. En effet, en remarquant que dans le second membre de l'équation (232.) on peut donner à $\mu-s$ une valeur négative, il pourra être aisément démontré, qu'on peut toujours trouver une fonction de la forme $S_\mu(x)$ qui est divisible par $(x^p-a^p)^r$, tandis que $S_{\mu-s}(x)$ est divisible par $(x^p-a^p)^{r+b}$, b étant plus grand que zéro. Car si toutes les quantités $S_\mu(x)$ étoient divisibles par une puissance de x^p-a^p égale à celle dont $S_{\mu-s}(x)$ est divisible ou plus grande, soit $S_q(x)$ celle parmi les quantités $S_\mu(x)$ qui est divisible par la plus petite puissance de x^p-a^p p. ex. par $(x^p-a^p)^\nu$, $S_{q-ds}(x)$ sera divisible par la même puissance de x^p-a^p, d étant un nombre entier positif. Soit maintenant $q=es+f$, e et f étant des nombres entiers positifs et f plus petit que s; en supposant $d=e+1$, $S_{q-ds}(x) = S_{f-s}(x) = S_{n+f-s}(x)R(x^p)$ ne sera pas divisible par une puissance de x^p-a^p plus haute que la ν^{me}. Mais $R(x^p)$ est divisible par $(x^p-a^p)^r$. Donc $S_{n+f-s}(x)$ ne sera divisible que par $(x^p-a^p)^{\nu-r}$, ce qui est contre l'hypothèse. On peut donc toujours trouver une fonction $S_\mu(x)$ qui est divisible par une plus petite puissance par x^p-a^p que $S_{\mu-s}(x)$. Donc on voit par l'équation (236.) que $U_\varrho(a).B_\varrho(a)$ et ses ν premiers coëfficiens différentiels sont égaux à zéro, et on démontrera aisément de la même manière que ci-dessus que le second membre de l'équation (240.) sera divisible par $(x^p-a^p)^\nu$; de plus $S_{\mu-s}(x)$ est d'après ce que nous venons de dire au moins divisible par $(x^p-a^p)^{\nu+1}$. Donc enfin $x^{s-\gamma p-1}M$ sera dans ce cas divisible par $(x^p-a^p)^{r+\alpha}$. $\frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}$ ne peut donc contenir aucun terme de la forme $\frac{Ax^{s-\gamma p-1}}{x^p-a^p}$, x^p-a^p étant un facteur de $R(x^p)$.

Cherchons maintenant la forme que doivent avoir les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$. Parceque $N=B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)$ doit être une fonction entière de x^p, $f_\nu(x)$ doit être de la forme:

$x^{d_\gamma}\left(a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \dots a_{f_\gamma} x^{f_\gamma p}\right)$. Désignons maintenant par $\sum_\varrho^\mu d_\nu$ la somme de ϱ quantités d_ν telles que la somme des indices soit égale à μ. Puisque N est une fonction rationnelle de x, la somme des indices des facteurs de $(R(x^p))^g$ dans chaque terme de N doit être $= gn$. Mais ces indices sont les mêmes que celles des exposans d_ν, et N doit être une fonction entière de x^p; donc on aura

$$241. \quad \sum_n^{gn} d_\nu = hp,$$

g et h étant des nombres entiers. En vertu de l'équation (219.) N peut être décomposé en termes de la forme $S_{n-\gamma}(x) R(x^p) f_\gamma(x)$, donc chaque terme de $S_{n-\gamma}(x)$ doit être de la forme $ax^{ip+\sum_n^{fn}(d_\nu)-d_\gamma} = ax^{ip+\sum_{n-1}^{fn-\gamma} d_\nu}$, i et f étant des nombres entiers. Maintenant en vertu de l'équation (218.) $x^{s-\gamma p-1}M$ peut être décomposé en termes de ces formes:

$$nAS_{n-s-\gamma}(x).R(x^p)\frac{df_\gamma(x)}{dx}, \quad nAS_{n-s+\gamma}(x).(R(x^p))^2\frac{df_{n-\gamma}(x)}{dx},$$
$$AS_{n-s-\gamma}(x)f_\gamma(x)\frac{dR(x^p)}{dx}, \quad AS_{n-s+\gamma}(x)f_{n-\gamma}(x)R(x^p)\frac{dR(x^p)}{dx};$$

donc chaque terme de $x^{s-\gamma p-1}M$ prend une de ces formes: $bx^{kp+\sum_{n-1}^{fn-s-\gamma}(d_\nu)+d_\gamma-1}$, $bx^{k'p+\sum_{n-1}^{fn-s+\gamma}(d_\nu)+d_{n-\gamma}-1}$, k et k' étant des nombres entiers. Mais $\sum_\varrho^\mu(d_\nu)+d_\varkappa = \sum_{\varrho+1}^{\mu+\varkappa}(d_\nu)$, donc chaque terme de $x^{s-\gamma p-1}M$ doit être de la forme $bx^{kp+\sum_n^{fn-s}(d_\nu)-1}$. De là, et parceque chaque terme de $x^{s-\gamma p-1}M$ doit aussi être de la forme bx^{s+ep-1}, on conclura que:

$$242. \quad kp + \sum_n^{fn-s}(d_\nu) - 1 = s + ep - 1,$$

et de là:

$$243. \quad \sum_n^{fn-s}(d_\nu) = s + e'p.$$

Considérons maintenant un produit de n facteurs de la forme $f_\nu(x)$ parmi lesquelles il se trouve s égaux à $f_a(x)$. Soit la somme des exposans de x dans chaque terme de ce produit égale à hp, h étant un nombre

entier; si au lieu des s quantités $f_a(x)$ on mêt s autres quantités $f_{a-1}(x)$, la somme des exposans dans chaque terme de ce nouveau produit sera en vertu de l'équation (243.) égale à $kp+s$, k étant un nombre entier. Donc, si l'indice d'une fonction $f_a(x)$ est diminué de 1, les exposans de x dans chaqu'un de ses termes seront augmentés de 1. De là on voit que $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ doivent ici avoir la même forme que dans le chapitre 1er, c'est à dire qu'on aura

$$244. \quad f_v(x) = x^{n-\xi p-v-\varrho+\alpha_\varrho}(a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+\dots),$$

ξ, ϱ, α_ϱ étant déterminés comme dans l'équation (45.).

Cherchons maintenant le degré de $x^{s-\gamma p-1}M$ et celui de N. Le degré de $f_v(x)$ étant d_v+f_vp, celui de $S_{n-\gamma}(x)$ est, comme on le voit aisément, $=\sum_{n-1}^{f n-\gamma}(d_v+f_vp)$. Par le second membre de l'équation (218.) on voit donc que le degré de $x^{s-\gamma p-1}M$ doit être égal à la plus grande valeur que peut avoir l'expression

$$245. \quad (q-1)pm+\sum_{n-1}^{f'n+\gamma}(d_v+f_vp)+d_{qn-s-\gamma}+pf_{qn-s-\gamma}+mp-1$$
$$= qmp-1+\sum_{n}^{f''n-s}(d_v+f_vp),$$

mp étant le degré de $R(x^p)$, f' et f'' des nombres entiers quelconques et $q=2$, si une des valeurs qu'on donne à v est plus grande que $n-s$, et $q=1$ si elles toutes sont égales à $n-s$ ou plus petites que $n-s$. Maintenant on a, d'après ce que nous venons de dire dans la démonstration du théorème 8me chapitre 1er, tout au plus:

$$246. \quad d_v+f_vp = n-v-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p+pt_{n-\varrho-v};$$

donc:

$$247. \quad \sum_{n}^{f''n-s}(d_v+f_vp) = \sum_{n}^{f''n-s}(n-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p+pt_{n-\varrho-v}-v)$$
$$= n(n-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p)+\sum_{n}^{f''n-s}(pt_{n-\varrho-v}-v).$$

Maintenant $t_{n-\varrho-v}$ est le nombre entier égal à la fraction $\frac{(n-\varrho-v)(m-r)}{n}$ $=m-r-\frac{\varrho(m-r)}{n}-\frac{vm}{n}+\frac{v}{p}$ ou immédiatement moindre que cette fraction. Donc il faut que $\sum_{n}^{f''n-s}(d_v+f_vp)$ soit égal à

$$n(n-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p)+p(n(m-r)-\varrho(m-r))+\sum_n^{f''n-1}\left(\nu-\frac{pm\nu}{n}-\nu\right)$$
$$=n(n-\varrho+\alpha_\varrho+\beta_\varrho p)+(pmn-n^2-pm\varrho+n\varrho)-\frac{pm}{n}\sum_n^{f''n-s}\nu$$
$$=\alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pmn-pm\varrho-\frac{pm}{n}(f''n-s)$$
$$=\alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pmn-pm\varrho-pmf''+\frac{pms}{n}$$ ou moindre que cette expression. Mais on voit de l'équation (243.) que $\sum_n^{f''n-s}(d_\nu+f_\nu p)$ doit être de la forme $s+ep$; donc, en remarquant que le nombre entier égal à $\frac{s(m-r)}{n}$ ou immédiatement moindre que $\frac{s(m-r)}{n}$ est la plus grande valeur que peut avoir e' si $s+e'p=$ ou $<\frac{pms}{n}$ et en désignant ce nombre par t_s, la plus grande valeur de $\sum_n^{f''n-s}(d_\nu+f_\nu p)$ sera

$$248.\quad \alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pnm-p\varrho m-pmf''+s+t_s p.$$

Donc en substituant dans l'équation (245.), et en remarquant que si $f''=1$, la plus grande valeur de q est 1 et si $f''>1$ elle est 2, on voit que le plus haut degré de $x^{s-\gamma p-1}M$ sera

$$249.\quad \alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pnm-p\varrho m+s+t_s p-1.$$

Le degré de N est, comme on voit de ce que nous venons de dire dans la démonstration du théorème 8me, égal à

$$250.\quad \alpha_\varrho n+\beta_\varrho pn+pnm-p\varrho m.$$

On a donc:

$$251.\quad \frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}=\alpha_{t_s}x^{s+t_s p-1}+\alpha_{t_s-1}x^{s+(t_s-1)p-1}+\dots\alpha_{-\gamma}x^{s-\gamma p-1}$$
$$+\frac{\beta_1 x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_1^p}+\frac{\beta_2 x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_2^p}+\dots\frac{\beta_\mu x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_\mu^p},$$

$x^p-g_1^p$, $x^p-g_2^p$, …, $x^p-g_\mu^p$, n'étant pas des facteurs de $R(p^p)$. De là il suit que, si $z+q>t_s+\gamma'+1$, les fonctions

$$\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-2)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},\quad\dots\int\frac{x^{s+(t_s+1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$

seront absolument irréductibles par des fonctions algébriques et logarithmiques. Elles constituent donc des fonctions transcendantes particulières.

En substituant dans l'équation (208.) la valeur ainsi trouvée de $\frac{x^{s-\gamma p-1}M}{N}$ et en intégrant, on obtiendra:

$$252.\quad \alpha_{t_s}\int\frac{x^{s+t_s p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\alpha_{t_s-1}\int\frac{x^{s+(t_s-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots\alpha_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$+\beta_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}+\ldots\beta_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g_\mu^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$$
$$=\sum_1^\varrho{}_\varrho\Big[A_\varrho\sum_1^n{}_\nu(c_\nu^s\log B_{\nu,\varrho}(x))\Big].$$

Cette équation présente la rélation la plus générale qui peut être exprimée par des fonctions logarithmiques entre les intégrales données.

Soient maintenant $B_{1,\varrho}(x)$, $B_{2,\varrho}(x)$, ... $B_{n,\varrho}(x)$ du degré $\mu_\varrho p$, le nombre des coëfficiens des quantités de la forme $B_{\nu,\varrho}(x)$, en vertu de ce que nous venons de démontrer dans les équations (57, 63, 65 et 66.) et parceque un des coëfficiens dans chacune de ces fonctions doit être indéterminé, sera égal à $\sum_1^\varrho{}_\nu\mu_\nu+\varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}-1\right)$, b étant le plus grand facteur commun de $m-r$ et de n. De plus le nombre des quantités $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ est ϱ. On a donc $\sum_\nu\mu_\nu+\varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}\right)$ quantités indéterminées. En différentiant l'équation (252.), faisant disparoître les dénominateurs et comparant les coëfficiens des puissances de x à exposans égaux, on obtiendra tout au plus $t_s+\gamma+1+\sum_1^\varrho{}_\nu\mu_\nu$ équations, par lesquelles on déterminera les quantités indéterminées susdites et les coëfficiens des intégrales dans le premier membre de l'équation (252.). Parmi ces coëfficiens on pourra supposer $\sum_1^\varrho{}_\nu\mu_\nu+\varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}\right)-1$ égaux à zéro et un arbitraire, mais différent de zéro. Il restera donc tout au plus $t_s+\gamma+1-\varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}\right)$ coëfficiens à déterminer.

Maintenant il-y-a à remarquer que puisque $r+b-m(n-1)$ est toujours un nombre pair, on doit avoir $m(n-1)-r-b+2 =$ ou <0 si $r+b>m(n-1)$. Or à la fin du chapitre 1. nous avons trouvé que les seuls cas où $m(n-1)-r-b+2 =$ ou <0, sont ceux où les fonc-

tions données ont les formes (72, 74 et 76.). Si donc ou $m>r$, ou $m=r$ et $r=$ ou $>\frac{n}{n-2}$, ou $m<r$ et $mp>1$, on aura toujours $r+b$ $=$ ou $<m(n-1)$. Dans ces cas, en faisant $\varrho=1$, le plus petit nombre des coëfficiens des intégrales dans le premier membre de l'équation (252.) qui restent à déterminer est tout au plus $t_s+\gamma+1+\frac{m(n-1)-r-b}{2}$ et on pourra toujours réduire une fonction de la forme $\int\frac{x^{s+\nu p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, ν étant égal à $-\gamma$ ou plus grand que $-\gamma$ et moindre que t_s+1, à $t_s+\gamma+1$ $+\frac{m(n-1)-r-b}{2}$ fonctions de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$.

Si au contraire $m=r=1$, ou $m=p=1$, ou $n=m=r=2$, on aura $r+b>m(n-1)$. Dans ce cas on peut toujours donner à ϱ une valeur telle que $t_s+\gamma+1-\varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}\right)$ devient égal à zéro, et les fonctions deviennent dans ce cas intégrables par des fonctions algébriques et logarithmiques. Donc les seules fonctions des formes $\int\frac{x^{s+mp-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ et $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-a^p)^{m_1}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ qui sont intégrables par des fonctions algébriques et logarithmiques sont les fonctions (72, 74 et 76.).

Chapitre 5.

Sur la réduction des intégrales de la forme $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}dx$ par elles mêmes et par des fonctions algébriques.

L'intégrale donnée étant mise sous la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ est comme on sait décomposable en plusieurs autres intégrales de la forme $\int\frac{x^{mp+s-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ et $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-a^p)^{m_1}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, m_1 étant un nombre positif quelconque, γ le nombre entier contenu dans $\frac{s-1}{p}$ et m un nombre entier positif ou négatif égal à $-\gamma$ ou plus grand que $-\gamma$. Il y aura donc à chercher la réduction de ces intégrales séparement et ensemble.

§. 1.

Réduction des intégrales de la forme $\int\frac{x^{mp+s-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ par elles mêmes.

La fonction algébrique la plus générale dont la différentielle peut se décomposer en termes de cette forme doit, comme on le voit aisément par la méthode que nous avons employée dans le chapitre 3me §. 1., avoir la forme suivante:

$$253.\quad f(x,\sqrt[n]{(R(x^p))}) = Q(x)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\left(\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right),$$

et on aura:

$$254.\quad df(x,\sqrt[n]{(R(x^p))}) = \frac{S\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}\Bigg[R(x^p)\frac{dQ(x)}{dx}+\frac{s}{n}.\frac{dR(x^p)}{dx}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}\Bigg(\frac{\frac{s}{n}x^{s-\gamma' p}\frac{dR(x^p)}{dx}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}$$
$$+\frac{(s-\gamma' p)x^{s-\gamma' p-1}R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}-\frac{\nu p x^{s-(\gamma'-1)p-1}R(x^p)}{(x-b_\varrho^p)^{\nu+1}}\Bigg)\Bigg].$$

Dans cette équation S doit être déterminé par l'équation (144.). En comparant les deux membres de l'équation (254.) on voit que $Q(x)$ sera déterminé comme dans l'équation (145.), et en supposant pour abréger:

$$255.\quad E'_{\nu,\varrho}(\sigma) =$$
$$\sum_0^{\nu_\varrho}{}_\gamma\Big[(-1)^{t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma'}.b_\varrho^{(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')p}.d_{\varrho,\gamma}\left(\frac{(t_\varrho-\nu-1)(t_\varrho-\nu-2)\dots(\sigma+\gamma'-\gamma+1)}{1.2.3\dots(t_\varrho+\gamma-\nu-\sigma-\gamma')}\right)$$
$$\times\left(t_\varrho s-t_\varrho\gamma' p-s\nu+\nu p\gamma-\nu p\sigma+\frac{s(t_\varrho\sigma+t_\varrho\gamma'-\nu\gamma)}{r}\right)\Big],$$

$$255'.\quad D'(\sigma) = \sum_\sigma^m{}_\gamma\left(s+\sigma p-\gamma p+\frac{sp\gamma}{n}\right)a_\gamma e_{\sigma-\gamma},$$

on trouvera:

$$256.\quad f_\sigma = D'(\sigma)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}E'_{\nu,\varrho}(\sigma).$$

En donnant dans cette équation successivement à σ les valeurs $-\gamma$, $-(\gamma-1)$, ..., $+r$, on obtiendra tous les coëfficiens de S et de même toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux membres de l'équation (254.). En intégrant cette équation et en remarquant que $r=m+k$, on obtiendra:

$$257.\quad f_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+f_{-(\gamma-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots f_{m+k}\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\Big(Q(x)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma' p}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\Big).$$

Comme dans le chapitre 3me §. 1. on voit qu'on peut supposer ici:

$$258.\quad f_{m+k}=-1,\quad f_{z+q-\gamma'}=f_{z+q-\gamma'+1}=\dots=f_{m+k-1}=0.$$

Par ces équations on déterminera $A_{1,1}$, $A_{2,1}$, ... $A_{t_q-1,q}$, $e_{-\gamma'}$, $e_{-(\gamma'-1)}$, ... e_k, et ensuite les coëfficiens de S: $f_{-\gamma}$, $f_{-(\gamma-1)}$, ... $f_{z+q-\gamma'-1}$ par les $z+q+\gamma-\gamma'$ équations suivantes:

$$259.\quad\begin{cases}f_{-\gamma}=D'(-\gamma)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}E'_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\ f_{-(\gamma-1)}=D'(-(\gamma-1))+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}E'_{\nu,\varrho}(-(\gamma-1)),\\ \dots\dots\dots\dots\\ f_{z+q-\gamma'-1}=D'(z+q-\gamma'-1)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho}E'_{\nu,\varrho}(z+q-\gamma'-1).\end{cases}$$

On obtiendra donc de l'équation (257.):

$$260.\quad\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=f_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+f_{-(\gamma-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots f_{z+q-\gamma'-1}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$-\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\Big(Q(x)+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\Big(\frac{A_{\nu,\varrho}x^{s-\gamma' p}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\Big)\Big).$$

De plus on voit aisément que les coëfficiens de $R(x^p)$ peuvent être déterminés, si s est divisible par p, par deux, et, si s n'est pas divisible par p, par un d'entre elles, de manière que la fonction $\int\frac{x^{s+(m+k)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ dévient intégrable par des fonctions algébriques, et que la seule fonction de cette forme qui est intégrable algébriquement, les coëfficiens de $R(x^p)$ étant quelconques, est $\int\frac{x^{\alpha p-1}.dx}{\sqrt[r]{(x^p-b^p)^c}}$, c'est à dire la même que nous avons trouvée dans le chapitre 3me §. 1.

§. 2.

Réduction des intégrales de la forme $\int \frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)^u \sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ par eux mêmes et par les intégrales de la forme $\int \frac{x^{mp+s-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$.

En faisant usage de la même méthode que nous avons suivie dans le chapitre 3me §. 2. on voit qu'il faut faire:

$$261. \quad f(x, \sqrt[n]{(R(x^p))})$$
$$= \sum_{1}^{u-1}{}_\mu \frac{A_\mu x^{s-\gamma' p} \sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{(x^p-g^p)^\mu} + \sum_{1}^{q}{}_\varrho \sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_\nu \frac{A_{\nu,\varrho} x^{s-\gamma' p} \sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}$$

et de là on aura en différentiant:

$$262. \quad df(x, \sqrt[n]{(R(x^p))}) = \frac{S dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$= \frac{dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}} \Bigg[\sum_{1}^{u-1}{}_\mu A_\mu \left(\frac{\frac{s}{n} x^{s-\gamma' p}.\frac{dR(x^p)}{dx} + (s-\gamma' p) x^{s-\gamma p-1}.R(x^p)}{(x^p-g^p)^\mu} - \frac{\mu p x^{s-(\gamma'-1)p-1}.R(x^p)}{(x^p-g^p)^{\mu+1}} \right)$$
$$+ \sum_{1}^{q}{}_\varrho \sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_\nu A_{\nu,\varrho} \left(\frac{\frac{s}{n} x^{s-\gamma' p}.\frac{dR(x^p)}{dx} + (s-\gamma' p) x^{s-\gamma p-1}.R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu} - \frac{\nu p x^{s-(\gamma'-1)p-1}.R(x^p)}{(x^p-b_\varrho^p)^{\nu+1}} \right) \Bigg].$$

De là on tire, en faisant pour abréger:

$$263. \quad \varkappa_\gamma = \sum_{1}^{u-1}{}_\mu A_\mu \Big[\tfrac{s}{n}(\mu+\gamma+1) p h_{\mu+1+\gamma} g^{p(1+\gamma-\gamma')} + \tfrac{s}{n}(\mu+\gamma) p h_{\mu+\gamma}(1+\gamma-\gamma')$$
$$+ (s-\gamma' p) h_{\mu+\gamma} - \mu p h_{\mu+1+\gamma} g^{p(1+\gamma-\gamma')} - \mu p h_{\mu+\gamma}(1+\gamma-\gamma') \Big],$$

$$264. \quad \lambda_\gamma = \sum_{1}^{q}{}_\varrho \sum_{1}^{t_\varrho-1}{}_\nu \left(A_{\nu,\varrho} E'_{\nu,\varrho}(\gamma-\gamma) \right),$$

$$265. \quad \varkappa'_\gamma = \varkappa_\gamma + \sum_{1}^{m-\gamma-1}{}_\nu \frac{\Gamma(\gamma+\nu+1) \varkappa_{\gamma+\nu} g^{\nu p}.(-1)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\gamma+1)},$$

$$266. \quad \sigma_\gamma = \varkappa'_\gamma + \lambda_\gamma;$$

$$267. \quad S = x^{s-\gamma p-1} \Big[\sum_{0}^{m-1-\gamma'+\gamma}{}_\gamma \sigma_\gamma x^{\gamma p} + \sum_{1}^{u}{}_\gamma \frac{\varkappa_{-\gamma}}{(x^p-g^p)^\gamma} \Big].$$

En substituant cette valeur de S dans l'équation (262.) et en intégrant on aura:

$$268.\quad \sigma_{m-1+\gamma-\gamma'}\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_{m-2+\gamma-\gamma'}\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-2)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\sigma_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$+\varkappa_{-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\varkappa_{-2}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)^2\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\varkappa_{-u}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left[\sum_1^{u-1}{}_\mu\frac{A_\mu}{(x^p-g^p)^\mu}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right].$$

Ici on peut supposer:

$$269.\quad\begin{cases}\sigma_{m-1+\gamma-\gamma'}=0,\\ \sigma_{m-2+\gamma-\gamma'}=0,\\ \dots\dots\dots\\ \sigma_{z+q+\gamma-\gamma'}=0,\\ \varkappa_{-2}=0,\\ \varkappa_{-3}=0,\\ \dots\dots\dots\\ \varkappa_{-(u-1)}=0,\\ \varkappa_{-u}=-1=-(u-1)ph_0g^{p(1+\gamma-\gamma')}A_{u-1},\end{cases}$$

et on obtiendra en substituant dans l'équation (262.):

$$270.\quad\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=\varkappa_{-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_1\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots$$
$$+\sigma_{z+q-(\gamma'-\gamma)-1}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}-x^{s-\gamma'p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left(\sum_1^{u-1}{}_\nu\frac{A_\nu}{(x^p-g^p)^\nu}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}}{(x^p-b_\varrho^p)^\varkappa}\right).$$

Par les équations (269.) on déterminera les coëfficiens $A_1, A_2, \dots A_{u-1}$, $A_{1,1}, A_{2,1}, \dots A_{t_q-1,q}$. Les coëfficiens $\sigma_0, \sigma_1, \dots \sigma_{z+q+\gamma-\gamma'-1}, \varkappa_{-1}$ seront ensuite déterminées par les équations qu'on obtient en donnant dans les équations (264, 265 et 266.) successivement à γ toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $q+z+\gamma-\gamma'-1$ et en donnant dans l'équation (263.) à γ la valeur -1.

L'équation (270.) doit toujours être employée, excepté dans le cas où $h_0=0$, ou $g^{p(1+\gamma-\gamma')}=0$. Dans ces cas elle devient illusoire, comme on le voit de la dernière des équations (269.). Dans le premier cas si $h_0=0$, x^p-g^p deviendra un facteur de $R(x^p)=x^p-b_\gamma^p$, et on aura

alors identiquement les équations:

$$\varkappa_{-u}(y)=0,\quad \varkappa_{-(u-1)}(y)=0,\quad \ldots\ldots\quad \varkappa_{-(u-t_y+1)}(y)=0.$$

On peut donc supposer au lieu des équations (269.) les suivantes:

$$271.\quad \begin{cases} \sigma_{m-1+\gamma-\gamma'}(y)=0, & \varkappa_{-1}(y)=0,\\ \sigma_{m-2+\gamma-\gamma'}(y)=0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \varkappa_{-(u-t_y-1)}(y)=0,\\ \sigma_{q+z+\gamma-\gamma'-t_y+1}(y)=0, & \varkappa_{-(u-t_y)}(y)=-1, \end{cases}$$

et on obtiendra alors de l'équation (268.):

$$272.\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x-b_y^p)^{u-t_y}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$=\sigma_0(y)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_1(y)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\ldots.\sigma_{q+z+\gamma-\gamma'-t_y}(y)\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma'-t_y)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$-x^{s-\gamma'p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left(\sum_1^{u-1}{}_\nu\frac{A_\nu(y)}{(x^p-b_y^p)^\nu}+\sum_1^q{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu\frac{A_{\nu,\varrho}(y)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

où toutes les valeurs entières plus grandes que t_y peuvent être données à u. Donc toutes les fois que $R(x^p)$ contient t_y facteurs égaux à $x^p-b_y^p$, on pourra toujours exprimer $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_y^p)^u\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ (où u est un nombre entier positif quelconque) par les $q+z+\gamma-\gamma'-t_y+1$ intégrales

$$\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \ldots.\quad \int\frac{x^{s+(q+z-\gamma'-t_y)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

et par une expression algébrique.

Dans le second cas, si $g^{p(1+\gamma-\gamma')}=0$ et par conséquent $g=0$ et $1+\gamma-\gamma'=1$, on voit que $\varkappa_{-u}$ deviendra égal à zéro, mais qu'on pourra alors faire $\varkappa_{-(u-1)}=-1$, à moins qu'en même temps une des quantités b_y ne soit pas égale à zero. Si cela n'a pas lieu on pourra au lieu des équations (269.) supposer les suivantes:

$$273.\quad \begin{cases} \sigma_{m-1}=0, & \varkappa_{-1}=0,\\ \sigma_{m-2}=0, & \varkappa_{-2}=0,\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \sigma_{q+z}=0, & \varkappa_{-(u-2)}=0,\\ & \varkappa_{-(u-1)}=A_{u-1}h_0(s-(u+\gamma-1)p)=-1. \end{cases}$$

et on obtiendra alors de l'équation (268.):

$$274.\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{(u-1)p}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$=\sigma_0^{(u-1)}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_1^{(u-1)}\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\ \sigma_{q+z-1}^{(u-1)}\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$-x^{s-\gamma p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left(\sum_1^{u-1}{}_{\nu}\frac{A_{\nu}^{(u-1)}}{x^{\nu p}}+\sum_1^{q}{}_{\varrho}\sum_1^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\frac{A_{\nu,\varrho}^{(u-1)}}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

La fonction $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{mp}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, m étant un nombre entier positif quelconque, s n'étant pas divisible par p et x^p n'étant pas un facteur de $R(x^p)$, peut donc toujours être exprimée par les $q+z$ intégrales

$$\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \dots\dots\quad \int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

et par une expression algébrique.

Si enfin une des quantités b_γ p. e. b_g est zéro, on aura les équations:

$$275.\quad \begin{cases}\sigma_{m-1}=0, & \varkappa_{-1}=0,\\ \sigma_{m-2}=0, & \varkappa_{-2}=0,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \sigma_{q+z-t_g}=0, & \varkappa_{-(u-t_g-2)}=0,\\ & \varkappa_{-(u-t_g-1)}=A_{u-1}h_{t_g}(s-(u+\gamma-1)p)=-1;\end{cases}$$

$$276.\quad \int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{p(u-t_g-1)}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

$$=\sigma_0(g)\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\sigma_1(g)\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\ \sigma_{q+z-t_g-1}(g)\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-t_g-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$-x^{s-\gamma p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left(\sum_1^{u-1}{}_{\nu}\frac{A_\nu(g)}{x^{\nu p}}+\sum_1^{q}{}_{\varrho}\sum_1^{t_\varrho-1}{}_{\nu}\frac{A_{\nu,\varrho}(g)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}\right).$$

La fonction $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^{mp}.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, où m est un nombre entier positif quelconque, $\gamma=\gamma'$, et $b_g=0$, est par conséquent réductible aux $q+z-t_g$ intégrales: $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, $\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{((R(x))^{n-s}}}$, ... $\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma-t_g-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$ et à une

expression algébrique. Dans tous les autres cas que ceux que nous venons de considérer cela est impossible.

Pour trouver une rélation entre les fonctions de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, on voit de ce que nous venons de démontrer, que x^p-g^p doit être un facteur de $R(x^p)$, ou que $g=0$ et $\gamma=\gamma'$. Il y aura donc trois cas à considérer, savoir, si $1+\gamma-\gamma'=0$, si $1+\gamma-\gamma'=1$ et $b_g=0$, si $1+\gamma-\gamma'=1$, pendant qu'aucune des quantités b_γ ne soit égale à zéro.

Soit premièrement $1+\gamma-\gamma'=0$. On doit alors faire:

277. $$C_1\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+C_2\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots C_{q+z}\int\frac{x^{p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{t_\gamma}{}_r\frac{B_r(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^r}.$$

En donnant ici à une des quantités C_1, C_2, ... C_{q+z} une valeur arbitraire, mais différente de zéro, on déterminera les autres quantités, ainsi que celles $B_1(1)$, $B_2(1)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$ par les équations suivantes:

278. $$\begin{cases} B_{t_1}(1)+C_1A_{t_1}(1)=0,\\ B_{t_2}(2)+C_2A_{t_2}(2)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ B_{t_{q+z}}(q+z)+C_{q+z}A_{t_{q+z}}(q+z)=0,\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_r(B_r(\varrho)+C_\varrho A_r(\varrho)+C_\gamma A_{r,\varrho}(\gamma))E'_{r,\varrho}(-\gamma)=0,\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_r(B_r(\varrho)+C_\varrho A_r(\varrho)+C_\gamma A_{r,\varrho}(\gamma))E'_{r,\varrho}(1-\gamma)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_r(B_r(\varrho)+C_\varrho A_r(\varrho)+C_\gamma A'_{r,\varrho}(\gamma))E'_{r,\varrho}(m-\gamma-2)=0. \end{cases}$$

Si de ces équations quelques unes dépendent des autres, on pourra égaler à zéro un nombre égal des quantités C_1, C_2, ... C_{q+z}.

Supposons dans le second cas $\gamma=\gamma'$ et $b_g=0$, on fera alors:

279. $$C_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+C_2\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots C_{g-1}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{g-1}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$+C_g\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{x^p.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots C_{q+z}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=x^{s-\gamma p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{t_\gamma}{}_\nu\frac{B_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\varrho^p)^\nu}.$$

Puis si des équations:

280. $$\left\{\begin{aligned}
&B_{t_1}(1)+C_1A_{t_1}(1)=0,\\
&B_{t_2}(2)+C_2A_{t_2}(2)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&B_{t_{g-1}}(g-1)+C_{g-1}A_{t_{g-1}}(g-1)=0,\\
&B_{t_g}(g)\;+C_g\;A_{t_g}(g)\;=\frac{r\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\tau_0(\gamma)C_\gamma)}{(rs-\gamma n+st_g-nt_g)a_{t_g}},\\
&B_{t_{g+1}}(g+1)+C_{g+1}A_{t_{g+1}}(g+1)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&B_{t_{q+z}}(q+z)+C_{q+z}A_{t_{q+z}}(q+z)=0,\\
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_0(\gamma)C_\gamma)=(B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g))E'_{t_g,g}(-\gamma)\\
&\qquad+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E'_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_1(\gamma)C_\gamma)=(B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g))E'_{t_g,g}(1-\gamma)\\
&\qquad+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E'_{\nu,\varrho}(1-\gamma),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_{q+z-1}(\gamma)C_\gamma)=(B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g))E'_{t_g,g}(q+z-\gamma-1)\\
&\qquad+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E'_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma-1),\\
&\qquad 0=(B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g))E'_{t_g,g}(q+z-\gamma)\\
&\qquad+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E'_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad 0=(B_{t_g}(g)+C_gA_{t_g}(g))E'_{t_g,g}(m-\gamma-1)\\
&\qquad+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E'_{\nu,\varrho}(m-\gamma-1),
\end{aligned}\right.$$

aucune ne dépend pas des autres il sera impossible de trouver une rélation entre les fonctions de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_\gamma^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$. Mais si k équations dépendent des autres, on pourra donner à une des quantités $C_1, C_2, \dots \dots C_{q+z}$ une valeur arbitraire mais différente de zéro, et à $k-1$ autres les valeurs zéro. Les $q+z-k$ restantes de ces quantités, ainsi que les m quantités $B_1(1), B_2(1), \dots B_{t_{q+z}}(q+z)$, seront alors déterminées par les équations (280.), en y faisant

$$\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_0(\gamma)C_\gamma)=0,\quad \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_1(\gamma)C_\gamma)=0,\quad \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_{q+z-1}(\gamma)C_\gamma)=0.$$

Soit en troisième lieu $\gamma=\gamma'$, mais aucune des quantités b_γ égale à zéro. On doit alors faire:

$$281.\quad C_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+C_2\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots C_{q+z}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=x^{s-\gamma p}.\sqrt[n]{(R(x^p))^s}\left(\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{t_\gamma}{}_\nu\frac{B_\nu(\gamma)}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu}\right).$$

Si alors des équations:

$$282.\quad\begin{cases}B_{t_1}(1)+C_1A_{t_1}(1)=0,\\ B_{t_2}(2)+C_2A_{t_2}(2)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ B_{t_{q+z}}(q+z)+C_{q+z}A_{t_{q+z}}(q+z)=0,\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_0(\gamma)C_\gamma)=\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(-\gamma),\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_1(\gamma)C_\gamma)=\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(1-\gamma),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \qquad 0=\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(B_\nu(\varrho)+C_\varrho A_\nu(\varrho)+C_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma))E_{\nu,\varrho}(m-\gamma-1),\end{cases}$$

aucune ne dépend des autres, il sera impossible de trouver une rélation en fonctions algébriques entres les intégrales de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$.

Si au contraire un nombre k de ces équations dépendent des autres, on pourra donner à une des quantités $C_1, C_2, \dots C_{q+z}$ une valeur arbitraire mais différente de zéro, et à $k-1$ autres les valeurs zéro. Les $q+z-k$

quantités restantes, ainsi que les m quantités $B_1(1)$, $B_2(2)$, ... $B_{t_{q+z}}(q+z)$ seront alors déterminées par les équations (282.) en y faisant $\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_0(\gamma)C_\gamma)=0$, $\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_1(\gamma)C_\gamma)=0$, ... $\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_{q+z-1}(\gamma)C_\gamma)=0$.

Pour trouver les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'expression

$$F_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+F_1\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots F_{q+z+\gamma-\gamma'-1}\int\frac{x^{s+(q+z-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

soit réductible à des intégrales de la forme $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}$, on voit par ce qui précède que x^p-g^p doit être un facteur de $R(x^p)$ et qu'on doit faire:

283. $$F_0\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+F_1\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots F_{z+q+\gamma-\gamma'-1}\int\frac{x^{s+(z+q-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=G_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+G_2\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_2^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots G_{q+z}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-b_{q+z}^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$+\sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{t_\gamma}{}_\nu\frac{H_\nu(\gamma)x^{s-\gamma' p}\sqrt[n]{(R(x^p))^s}}{(x^p-b_\gamma^p)^\nu},$$

où les rélations entre les quantités F_0, F_1, ... $F_{z+q+\gamma-\gamma'-1}$, G_1, G_2, ... G_{q+z}, $H_1(1)$, $H_2(1)$, ... $H_{t_{q+z}}(q+z)$ sont déterminées par les équations suivantes:

284. $$\begin{cases}F_0-\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_0(\gamma)G_\gamma)=0,\\ F_1-\sum_1^{q+z}{}_\gamma(\sigma_1(\gamma)G_\gamma)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ F_{z+q+\gamma-\gamma'-1}-\sum_{\gamma+1}^{q+z}{}_\gamma(\sigma_{z+q+\gamma-\gamma'-1}(\gamma)G_\gamma)=0,\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)).E'_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma')=0,\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)).E'_{\nu,\varrho}(q+z-\gamma'+1)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_1^{q+z}{}_\gamma\sum_1^{q}{}_\varrho\sum_1^{t_\varrho-1}{}_\nu(H_\nu(\varrho)-G_\varrho A_\nu(\varrho)-G_\gamma A_{\nu,\varrho}(\gamma)).E'_{\nu,\varrho}(m-\gamma'-1)=0,\\ H_{t_1}(1)-G_1A_{t_1}(1)=0,\\ H_{t_2}(2)-G_2A_{t_2}(2)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ H_{t_{q+z}}(q+z)-G_{t_{q+z}}(q+z)=0.\end{cases}$$

Chapitre 6.

De la réduction des intégrales de la forme $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}dx$ par eux mêmes et par des fonctions logarithmiques.

Comme nous venons de voir, l'intégrale $\int x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^s}dx$ peut être réduite par des fonctions algébriques aux $m+1+\gamma-\gamma'$ intégrales suivantes: $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[r]{(R(x^p))^{n-s}}}$, $\int\frac{x^{s-(\gamma-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, ... $\dots\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$, et ces intégrales sont généralement irréductibles par des fonctions algébriques. Pour trouver maintenant les relations entre ces intégrales qu'on peut obtenir par des fonctions logarithmiques, on cherchera la fonction logarithmique la plus générale dont la différentielle est décomposable en termes de la forme $\int\frac{x^{mp+s-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ et $\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g^p)^{m_1}\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$. En désignant par $B_{\varrho,\mu}(x)$ la même quantité qui se presentoit chapitre 4. (204.), cette fonction aura la valeur suivante:

$$285.\quad T=\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{\mu}\left[A_\mu\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{\nu}\left(\frac{1}{c_\nu^s}\log B_{\nu,\mu}(x)\right)\right],$$

et on trouvera, en différentiant:

$$286.\quad \frac{dT}{dx}=\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{\mu}\left[A_\mu\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{\nu}\left(\frac{1}{c_\nu^s}\cdot\frac{dB_{\nu,\mu}(x)}{dx.B_{\nu,\mu}(x)}\right)\right]$$

$$=\frac{\overset{\mu}{\underset{1}{\Sigma}}{}_{\mu}\,n\,A_\mu\overset{1}{\underset{0}{\Sigma}}{}_{q}\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}{}_{\nu}\left[(R(x^p))^q S_\nu(x)\left(R(x^p)\frac{df_{qn+s-\nu}(x)}{dx}+\frac{qn+s-\nu}{n}f_{qn+s-\nu}\frac{dR(x^p)}{dx}\right)\right]}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}.B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)}$$

ou, en désignant par $\frac{x^{s-\gamma p-1}M'dx}{N.\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$ un des termes de $\frac{dT}{dx}$,

$$287.\quad x^{s-\gamma p-1}M'$$

$$=nA\Big[S_s(x)R(x^p)\frac{df_0(x)}{dx}+S_{s-1}(x)R(x^p))\frac{df_1(x)}{dx}+\dots.S_0(x)R(x^p))\frac{df_s(x)}{dx}$$
$$+S_{n-1}(x)(R(x^p))^2\frac{df_{s+1}(x)}{dx}+\dots.S_{s+1}(x)(R(x^p))^2\frac{df_{n-1}(x)}{dx}$$
$$+\frac{1}{n}\Big(sS_0(x)f_s(x)+(s-1)S_1(x)f_{s-1}(x)+\dots.S_{s-1}(x)f_1(x)$$
$$+(n-1)S_{s+1}(x)f_{n-1}(x)R(x^p)+\dots.(s+1)S_{n-1}(x)f_{s+1}(x)R(x^p)\Big)\frac{dR(x^p)}{dx}\Big],$$

$$288.\quad N=S_0(x)f_0(x)+S_{n-1}(x)R(x^p)f_1(x)+\dots.S_1(x)R(x^p)f_{n-1}(x).$$

En faisant maintenant:

$$289. \quad D'_\varrho(x) = \frac{S_\mu(x)\,S_{s+\varrho}(x) - S_{\mu+s}(x)\,S_\varrho(x)}{N},$$

$D'_\varrho(x)$, en vertu de l'éuqation (224.), deviendra une fonction entière de x si $s+\varrho < n$, et $D'_\varrho(x)\,R(x^p)$ une fonction entière si $s+\varrho =$ ou $> n$. En substituant dans l'équation (287.) on trouvera:

$$290. \quad x^{s-\gamma p-1} M'$$

$$= A. \frac{\left\{\begin{array}{l} nR(x^p)N\Big[D'_0(x)\frac{df_0(x)}{dx} + D'_{n-1}(x)\,R(x^p)\frac{df_1(x)}{dx} + \dots D'_1(x)\,R(x^p)\frac{df_{n-1}(x)}{dx} \\ \qquad + \frac{1}{n}\overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma_\nu}}\left(\nu D'_{n-\nu}(x)\,f_\nu(x)\frac{dR(x^p)}{dx}\right)\Big] + S_{\mu+s}(x)\,R(x^p)\frac{dN}{dx} \end{array}\right\}}{S_\mu(x)},$$

μ étant un nombre quelconque positif ou négatif, moindre que n. Comme dans le chapitre 4. on voit donc que $\frac{x^{s-\gamma p-1} M'}{N}$ ne pourra avoir aucun terme de la forme $\frac{Ax^{s-\gamma p-1}}{(x^p - g^p)^q}$, q étant plus grand que l'unité, ni de la forme $\frac{A\,x^{s-\gamma p-1}}{x^p - b^p_\gamma}$, $x^p - b^p_\gamma$ étant un facteur de $R(x^p)$. Cherchons maintenant la forme que doivent avoir les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$. Parceque $N = B_1(x).B_2(x) \dots B_n(x)$ doit être une fonction entière de x^p, $f_\nu(x)$ doit être de la forme: $x^{d'_\nu}(b_0 + b_1 x^p + b_2 x^{2p} + \dots b_{f'_\nu} x^{f'_\nu p})$. En désignant maintenant le même par $\overset{\mu}{\underset{\varrho}{\Sigma}} d'_\nu$ comme dans le chapitre 4. on aura:

$$291. \quad \overset{gn}{\underset{n}{\Sigma}} d'_\nu = hp,$$

g et h étant des nombres entiers. Chaque terme de $S_{n-\gamma}(x)$ doit donc être de la forme $ax^{ip + \overset{f'n-\gamma}{\underset{n-1}{\Sigma}} d'_\nu}$. Maintenant, en vertu de l'équation (287.), $x^{s-\gamma p-1} M'$ peut être décomposé en termes des formes: $Ax^{kp + \overset{fn+s-\gamma}{\underset{n-1}{\Sigma}} d'_\nu + d'_\gamma - 1}$, $Ax^{k'p + \overset{fn-\gamma}{\underset{n-1}{\Sigma}} d'_\nu + d'_{s+\gamma} - 1}$. Mais $\overset{f'n+s-\gamma}{\underset{n-1}{\Sigma}} d'_\nu + d'_\gamma = \overset{f'n+s}{\underset{n}{\Sigma}} d'_\nu$ et $\overset{fn-\gamma}{\underset{n-1}{\Sigma}} d'_\nu + d'_{s+\gamma} = \overset{fn+s}{\underset{n}{\Sigma}} d'_\nu$.

Donc chaque terme de $x^{s-\gamma p-1} M'$ aura de la forme $Ax^{kp + \overset{fn+s}{\underset{n}{\Sigma}} d'_\nu - 1}$. Mais il doit être de la forme Ax^{s+cp-1}; donc:

$$292. \quad kp + \sum_{n}^{fn+s} d'_\nu - 1 = s + ep - 1,$$

et de là:

$$293. \quad \sum_{n}^{fn+s} d'_\nu = s + e'p.$$

Par cette équation et par celle (291.) on voit que $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ doivent avoir ici la même forme comme dans le chapitre 2., c'est à dire que:

$$f_0(x) = x^{\nu+\varrho+\alpha_\varrho+zp-n}(b_0 + b_1 x^p + b_2 x^{2p} + \ldots),$$

z, ϱ, α_ϱ étant déterminés comme dans l'équation (109.).

Pour trouver le degré de $x^{s-\gamma p-1}M'$, il y a à remarquer que, le degré de $f_\nu(x)$ étant égal à $d'_\nu + f'_\nu p$, celui de $S_\gamma(x)$ est $\sum_{n-1}^{fn+\gamma}(d'_\nu + f'_\nu p)$. Donc le degré de $x^{s-\gamma p-1}M'$ est égal à la plus grande valeur que peut avoir l'expression

$$294. \quad qmp + \sum_{n-1}^{fn+\gamma}(d'_\nu + f'_\nu p) + mp + d'_{qn+s-\gamma} + pf'_{qn+s-\gamma} - 1$$
$$= qmp + mp + \sum_{n}^{f''n+s}(d'_\nu + f'\nu p) - 1,$$

mp étant le degré de $R(x^p)$, f et f'' des nombres entiers, et $q=1$, si une des valeurs qu'on donne à ν est plus grande que s, et $q=0$ si ν ne l'est pas. Maintenant suivant ce que nous venons de dire dans la démonstration du théorème 15me on a

$$d'_\nu + f'_\nu p = \nu + \varrho + \alpha_\varrho + \beta_\varrho p - n + pq_{n-\varrho-\nu}$$

$q_{n-\varrho-\nu}$ désignant le nombre entier immédiatement moindre que $\frac{(n-\varrho-\nu)(m+r)}{n}$, ou égal à cette quantité. Donc

$$295. \quad \sum_{n}^{f''n+s}(d'_\nu + f'_\nu p) = n(\varrho + \alpha_\varrho + \beta_\varrho p - n) + \sum_{n}^{f''n+s}(pq_{n-\varrho-\nu} + \nu).$$

De là on voit que $\sum_{n}^{f''n+s}(d'_\nu + f'_\nu)$ est égal à

$$n(\varrho + \alpha_\varrho + \beta_\varrho p - n) + p(n-\varrho)(m+r) + \sum_{n}^{f''n+s}\left(\nu - \frac{pm\nu}{n} - \nu\right)$$
$$= n\alpha_\varrho + np\beta_\varrho + pnm - p\varrho m - \frac{pm}{n}\sum_{n}^{f''n+s}\nu$$
$$= n\alpha_\varrho + np\beta_\varrho + pnm - p\varrho m - \frac{pm}{n}(f''n+s)$$

ou moindre que cette quantité. Mais on voit par l'équation (293.) que

$\sum\limits_{n}^{f''n+s}(d'_r+f'_r p)$ doit avoir la forme $s+ep$; donc, en remarquant que le nombre entier égal à $\frac{(n-s)(m+r)}{n}$ où immédiatement moindre que $\frac{(n-s)(m+r)}{n}$ est la plus grande valeur que peut avoir e' si $s+e'p =$ ou $< mp-\frac{mps}{n}$, et en désignant ce nombre par q_{n-s}, on trouvera que la plus grande valeur de $mp+\sum\limits_{n}^{f''n+s}(d'_r+f'_r p)$ est

$$296.\quad n\alpha_\varrho+np\beta_\varrho+pnm-p\varrho m+s+q_{n-s}p-pmf''.$$

Donc en substituant dans l'équation (294.) et en remarquant que si $f''>0$, la plus grande valeur de q est 1, et si $f''=0$, elle est zéro, on voit que le plus haut degré de $x^{s-\gamma p-1}M'$ est

$$297.\quad n\alpha_\varrho+np\beta_\varrho+pnm-p\varrho m+s+q_{n-s}.p-1.$$

Le degré de N est égal à

$$298.\quad n\alpha_\varrho+np\beta_\varrho+pnm-p\varrho m.$$

On a donc:

$$299.\quad \frac{x^{s-\gamma p-1}M'}{N}=\alpha_{q_{n-s}}x^{s+q_{n-s}p-1}+\alpha_{q_{n-s}-1}x^{s+(q_{n-s}-1)p-1}+\dots\alpha_{-\gamma}x^{s-\gamma p-1}$$
$$+\frac{\beta_1 x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_1^p}+\frac{\beta_2 x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_2^p}+\dots\frac{\beta_\mu x^{s-\gamma p-1}}{x^p-g_\mu^p},$$

$x^p-g_1^p$, $x^p-g_2^p$, ... $x^p-g_\mu^p$ n'étant pas des facteurs de $R(x^p)$. De là il suit que si $m-\gamma'>q_{n-s}+1$, les fonctions

$$\int\frac{x^{s+(m-\gamma'-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \int\frac{x^{s+(m-\gamma'-2)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},\quad \dots\quad \int\frac{x^{s+(q_{n-s}+1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

sont absolument irréductibles par les fonctions algébriques et logarithmiques. Donc elles constituent des fonctions transcendantes particulières.

En substituant la valeur ainsi trouvée de $\frac{x^{s-\gamma p-1}M'}{N}$ dans l'équation (286.) et en intégrant, on obtiendra:

$$300.\quad \alpha_{q_{n-s}}\int\frac{x^{s+q_{n-s}p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\alpha_{q_{n-s}-1}\int\frac{x^{s+(q_{n-s}-1)p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\alpha_{-\gamma}\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$+\beta_1\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g_1^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}+\dots\beta_\mu\int\frac{x^{s-\gamma p-1}.dx}{(x^p-g_\mu^p)\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$
$$=\sum_1^\varrho{}_\varrho\Big[A_\varrho\sum_1^n{}_r\Big(\frac{1}{c_r^s}\log B_{r,\varrho}(x)\Big)\Big].$$

Cette équation contient la rélation la plus générale entre les intégrales données qui peut être trouvée par les fonctions logarithmiques.

Soit maintenant la quantité $B_{1,\varrho}(x).B_{2,\varrho}(x)\ldots.B_{n,\varrho}(x)$ du degré $\mu_\varrho p$, le nombre des coëfficiens dans les quantités de la forme $B_{\nu,\varrho}(x)$, en vertu de ce que nous avons démontré pour les équations (116, 122 et 124.) et en remarquant qu'un des coëfficiens dans chacune de ces fonctions doit être indéterminé, sera égal à $\sum_1^\varrho {}_\nu \mu_\nu + \varrho\left(\frac{r+b'-m(n-1)}{2}-1\right)$, b' étant le plus grand facteur commun de $m+r$ et n. De plus, le nombre des coëfficiens $A_1, A_2, \ldots. A_\varrho$ est ϱ. On a donc en totalité $\sum_1^\varrho {}_\nu \mu_\nu + \varrho\left(\frac{r+b'-m(n-1)}{2}\right)$ quantités indéterminées. En différentiant l'équation (300.), faisant disparoître les dénominateurs et comparant les coëfficiens des mêmes puissances de x, on obtiendra tout au plus $q_{n-s}+\gamma+1+\sum_1^\varrho {}_\nu \mu_\nu$ équations, par lesquelles on déterminera les quantités indéterminées susdites et les coëfficiens des intégrales du premier membre de l'équation (300.). Parmi ces coëfficiens on pourra supposer $\sum_1^\varrho {}_\nu \mu_\nu + \varrho\left(\frac{r+b-m(n-1)}{2}\right)-1$ égaux à zéro, et un coëfficient sera arbitraire, mais différent de zéro. Il restera donc tout au plus $q_{n-s}+\gamma+1-\varrho\left(\frac{r+b'-m(n-1)}{2}\right)$ coëfficiens à déterminer. En remarquant maintenant que $r+b'-m(n-1)$ doit toujours être un nombre pair, on voit que, si $r+b'>m(n-1)$, on doit avoir $m(n-1)-r-b'+2$ $=$ ou <0, et parceque dans ce cas on peut donner seulement à ϱ une valeur entière et positive telle, que $q_{n-s}+\gamma+1-\varrho\left(\frac{r+b'-m(n-1)}{2}\right)$ devient égal à zéro ou moindre que zéro, les seuls cas où cela sera possible et où par conséquent les fonctions données seront intégrables par des fonctions algébriques et logarithmiques seront ceux que nous avons trouvés à la fin du chapitre 2., savoir les cas des fonctions (130, 132 et 134.). Dans tout autre cas il faut faire $\varrho=1$, et on réduira dans ce cas une des intégrales du premier membre de l'équation (286.) à $q_{n-s}+\gamma+1+\frac{m(n-1)-r-b'}{2}$ autres intégrales de ce membre et à une fonction logarithmique.

Note rélative au chapitre 1.

Si, comme dans le théorème 5. on suppose que la fonction $F(x^p)$ est de la forme

$$1.\quad F(x^p) = A_0 + A_1 x^p + A_2 x^{2p} + \dots A_\varrho x^{\varrho p},$$

en désignant par ϱ le nombre entier immédiatement moindre que $\gamma + \frac{s(m-r)}{n}$; si l'on fait de plus:

$$2.\quad \Pi(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}\mathfrak{F}(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^s}},$$

$R(x^p)$ étant une fonction entière de x^p, du degré m, et qu'on soumét cette intégrale à la condition de s'évanouir avec x, on aura en vertu des théorèmes 5. et 8.:

$$3.\quad \Pi(x_1) + \Pi(x_2) + \dots \Pi(x_\mu) = -c^s(\Pi(y_1) + \Pi(y_2) + \dots \Pi(y_\nu)),$$

μ étant un nombre entier quelconque, $\nu = \frac{m(n-1)-r-b+2}{2}$, c une quelconque des valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$, $x_1, x_2, \dots x_\mu$ des quantités arbitraires, les racines dans les fonctions $\Pi(x_1)$, $\Pi(x_2)$, ... $\Pi(x_\mu)$ étant arbitraires, y_1, y_2, ... y_ν des fonctions rationnelles de x_1, x_2, ... x_μ et des racines $\sqrt[n]{(R(x_1^p))}$, $\sqrt[n]{(R(x_2^p)}$, ... $\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))}$, et les racines dans les fonctions $\Pi(y_1)$, $\Pi(y_2)$, ... $\Pi(y_\nu)$ étant déterminées par les racines dans les fonctions $\Pi(x_1)$, $\Pi(x_2)$, ... $\Pi(x_\mu)$ et par la valeur de c. Pour déterminer ces quantités, on formera les fonctions suivantes:

$$4.\quad \begin{cases} f_0(x) = x^q\,(a_{0,0} + a_{0,1}x^p + a_{0,2}x^{2p} + \dots a_{0,u+t_\sigma}x^{(u+t_\sigma)p}), \\ f_1(x) = x^{q-1}(a_{1,0} + a_{1,1}x^p + a_{1,2}x^{2p} + \dots a_{1,u+t_{\sigma-1}}x^{(u+t_{\sigma-1})p}), \\ f_2(x) = x^{q-2}(a_{2,0} + a_{2,1}x^p + a_{2,2}x^{2p} + \dots a_{2,u+t_{\sigma-2}}x^{(u+t_{\sigma-2})p}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_q(x) = \quad (a_{q,0} + a_{q,1}\,x^p + a_{q,2}\,x^{2p} + \dots a_{q,u+t_{\sigma-q}}\,x^{(u+t_{\sigma-q})p}), \\ f_{q+1}(x) = x^{p-1}(a_{q+1,0} + a_{q+1,1}x^p + a_{q+1,2}x^{2p} + \dots a_{q+1,u+t_{\sigma-q-1}}x^{(u+t_{\sigma-q-1})p}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x) = x^{q+1}(a_{n-1,0} + a_{n-1,1}x^p + a_{n-1,2}x^{2p} + \dots a_{n-1,u+t_{\sigma-n+1}}x^{(u+t_{\sigma-n+1})p}), \end{cases}$$

où t_z désigne le nombre entier contenu dans la fraction $\frac{z(m-r)}{n}$. On peut ici donner à q une valeur entière positive quelconque plus petite que p, et à σ une valeur entière quelconque telle que $\mu+\nu-rq-(m-r)\sigma$ devient

divisible par n. En retranchant du quotient de ces deux nombres le nombre entier égal à $\frac{\sigma-q}{p}$, ou immédiatement plus grand que cette fraction, la différence sera ce que avons désigné par u. On doit de plus faire:

$$5.\quad\begin{cases} B_1(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1.\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1.\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad\dots+f_{n-1}(x)(c_1.\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \\ B_2(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1^2.\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1^2.\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad\dots+f_{n-1}(x)(c_1^2.\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_n(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1^n.\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1^n.\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad\dots+f_{n-1}(x)(c_1^n.\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \end{cases}$$

c_1 étant une des valeurs imaginaires de $((1))^{\frac{1}{n}}$, ou $c_1=-1$ si $n=2$.

En donnant maintenant à un des coëfficiens des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ une valeur arbitraire mais différente de zéro, on déterminera les μ autres coëfficiens par les μ équations suivantes:

$$6.\quad\begin{cases} f_0(x_1)+f_1(x_1).\sqrt[n]{(R(x_1^p))}+f_2(x_1).\sqrt[n]{(R(x_1^p))^2}+\dots.f_{n-1}(x_1).\sqrt[n]{(R(x_1^p))^{n-1}}=0, \\ f_0(x_2)+f_1(x_2).\sqrt[n]{(R(x_2^p))}+f_2(x_2).\sqrt[n]{(R(x_2^p))^2}+\dots.f_{n-1}(x_2).\sqrt[n]{(R(x_2^p))^{n-1}}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_0(x_\mu)+f_1(x_\mu).\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))}+f_2(x_\mu).\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^2}+\dots.f_{n-1}(x_\mu).\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^{n-1}}=0, \end{cases}$$

en donnant dans la première de ces équations à $\sqrt[n]{(R(x_1^p))}$ la valeur qu'elle a dans la fonction $\Pi(x_1)$, dans la seconde à $\sqrt[n]{(R(x_2^p))}$ la valeur qu'elle a dans la fonction $\Pi(x_2)$ et ainsi de suite.

Les quantités y_1, y_2, y_3, ... y_ν seront alors déterminées par l'équation suivante:

$$7.\quad B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)$$
$$= M(x^p-x_1^p)(x^p-x_2^p)\dots.(x^p-x_\mu^p)(x^p-y_1^p)(x^p-y_2^p)\dots.(x^p-y_\nu^p),$$

et elles seront par conséquent les racines de l'équation suivante du degré ν:

$$8.\quad \frac{B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)}{(x^p-x_1^p)(x^p-x_2^p)\dots.(x^p-x_\mu^p)}=0.$$

Les valeurs de $\sqrt[n]{(R(y_1^p))}$, $\sqrt[n]{(R(y_2^p))}$, ... $\sqrt[n]{(R(y_\nu^p))}$ dans les fonctions $\Pi(y_1)$, $\Pi(y_2)$, ... $\Pi(y_\nu)$ seront déterminées par les équations

$$9.\quad\begin{cases}\sqrt[n]{(R(y_1^p))^\varepsilon} = \dfrac{c^\varepsilon . C_k(y_1)}{C_{k-\varepsilon}(y_1)},\\ \sqrt[n]{(R(y_2^p))^\varepsilon} = \dfrac{c^\varepsilon . C_k(y_2)}{C_{k-\varepsilon}(y_2)},\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \sqrt[n]{(R(y_\nu^p))^\varepsilon} = \dfrac{c^\varepsilon . C_k(y_\nu)}{C_{k-\varepsilon}(y_\nu)},\end{cases}$$

où k est un nombre entier positif quelconque et où $C_\varrho(x)$ désigne le coëfficient de $df_\varrho(x)$ dans la différentielle du produit $B_1(x).B_2(x)....B_n(x)$ par rapport à $f_\varrho(x)$. On voit par là que les quantités y_1, y_2, ... y_ν sont absolument indépendantes des coëfficiens de x^p dans la fonction $F(x^p)$. En faisant donc:

$$10.\quad \varphi_k(x) = \int\frac{x^{\alpha-\gamma p-1}.x^{kp}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^\varepsilon}}$$

et $\mu = 2\nu$, $x_{\nu+1} = x'_1$, $x_{\nu+2} = x'_2$, ... $x_{2\nu} = x'_\nu$, l'équation (8.) entrainera les $\varrho+1$ équations suivantes:

$$11.\quad\begin{cases}\left\{\begin{matrix}\varphi_0(x_1)+\varphi_0(x_2)+\dots\varphi_0(x_\nu)\\ +\varphi_0(x'_1)+\varphi_0(x'_2)+\dots\varphi_0(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^\varepsilon(\varphi_0(y_1)+\varphi_0(y_2)+\dots\varphi_0(y_\nu)),\\ \left\{\begin{matrix}\varphi_1(x_1)+\varphi_1(x_2)+\dots\varphi_1(x_\nu)\\ +\varphi_1(x'_1)+\varphi_1(x'_2)+\dots\varphi_1(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^\varepsilon(\varphi_1(y_1)+\varphi_1(y_2)+\dots\varphi_1(y_\nu)),\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \left\{\begin{matrix}\varphi_\varrho(x_1)+\varphi_\varrho(x_2)+\dots\varphi_\varrho(x_\nu)\\ +\varphi_\varrho(x'_1)+\varphi_\varrho(x'_2)+\dots\varphi_\varrho(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^\varepsilon(\varphi_\varrho(y_1)+\varphi_\varrho(y_2)+\dots\varphi_\varrho(y_\nu)).\end{cases}$$

Il y a maintenant à remarquer que toujours $\nu > \varrho$. Pour démontrer cela nous considérerons séparement les quatres cas: $m-r = n$, $m-r < n$ (mais non $m-r = 0$), $m-r = 0$, et $m-r > n$.

Si $m-r = n$, on a $b = n$, donc $\nu = \frac{(n+r)(n-2)+2}{2}$; de plus la plus grande valeur de ϱ est $\frac{(n-2)(p+1)}{2}$. On a alors, parceque $n > 1$:

$$n-2 < (n-2)\frac{n}{2}+\frac{p}{p+1},$$
$$(n-2)(p+1) < \frac{(n-2)(n+r)p+2p}{2},$$

$$\frac{(n-2)(p+1)}{p}<\frac{(n-2)(n+r)+2}{2},$$
$$\varrho<\nu.$$

Si $m-r<n$, mais non pas $m-r=0$, la plus grande valeur de ϱ est $\frac{mn-m-r}{n}$, la plus grande valeur de b est $m-r$, et la plus petite valeur de ν est par conséquent $\frac{mn-2m+2}{2}$. On a alors:

$$n = \text{ou} > 2,$$
$$n^2 = \text{ou} > 4(n-1),$$
$$mn^2 = \text{ou} > 4m(n-1),$$
$$mn^2+2r > 4m(n-1)+2(m-n),$$
$$mn^2-2mn+2n > 2(mn-m-r),$$
$$\frac{mn-2m+2}{2} > \frac{mn-m-r}{n},$$
$$\nu > \varrho.$$

Si $m-r=0$, on a: $b=n$, donc $\nu=\frac{(n-2)(r-1)}{2}$. La plus grande valeur de ϱ sera $\frac{n-2}{p}-1$. On a alors:

$$n^2-4n+4 > n^2-4n,$$
$$(n-2)^2 > (n-4)n,$$
$$(n-2)^2 > (n-4)p,$$
$$(n-2)(n-p) > 2(n-2)-2p,$$
$$\frac{(n-2)(r-1)}{2} > \frac{n-2}{p}-1,$$
$$\nu > \varrho.$$

Enfin si $m-r>n$, la plus grande valeur de ϱ sera: $\frac{mn-m-r-n}{n}$, la plus grande valeur de b sera n, et la plus petite valeur de ν sera par conséquent $\frac{mn-m-r-n}{2}+1$. On a alors:

$$m > r+n,$$
$$mn-m > (r+n)(n-1).$$

Mais $\quad n = \text{ou} > 2,$

donc $\quad mn-m > r+n,$

$$mn-m-r-n > 0,$$
$$\frac{mn-m-r-n}{2} = \text{ou} > \frac{mn-m-r-n}{n},$$
$$\nu > \varrho.$$

On a donc toujours $\nu =$ ou $> \varrho+1$, c'est à dire: le nombre des équations (11.) est toujours égal à ν ou plus petit que ν. En faisant maintenant, pour abréger:

$$12.\quad \begin{cases} \varphi_0(x_1)+\varphi_0(x_2)+\dots\varphi_0(x_\nu) = u_0, \\ \varphi_1(x_1)+\varphi_1(x_2)+\dots\varphi_1(x_\nu) = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_\varrho(x_1)+\varphi_\varrho(x_2)+\dots\varphi_\varrho(x_\nu) = u_\varrho, \\ \varphi_0(x'_1)+\varphi_0(x'_2)+\dots\varphi_0(x'_\nu) = v_0, \\ \varphi_1(x'_1)+\varphi_1(x'_2)+\dots\varphi_1(x'_\nu) = v_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_\varrho(x'_1)+\varphi_\varrho(x'_2)+\dots\varphi_\varrho(x'_\nu) = v_\varrho, \end{cases}$$

le nombre des quantités $x_1, x_2, \dots x_\nu$ sera toujours égal à celui des quantités $u_0, u_1, \dots u_\varrho$, ou plus grand que ce nombre, et de même le nombre des quantités $x'_1, x'_2, x'_3, \dots x'_\nu$ sera toujours égal à celui des quantités $v_0, v_1, \dots v_\varrho$, ou il le surpassera. On peut donc toujours supposer des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu$ telles que:

$$13.\quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1(u_0, u_1, u_2, \dots u_\varrho), \\ x_2 = \lambda_2(u_0, u_1, u_2, \dots u_\varrho), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_\nu = \lambda_\nu(u_0, u_1, u_2, \dots u_\varrho), \\ x'_1 = \lambda_1(v_0, v_1, v_2, \dots v_\varrho), \\ x'_2 = \lambda_2(v_0, v_1, v_2, \dots v_\varrho), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_\nu = \lambda_\nu(v_0, v_1, v_2, \dots v_\varrho). \end{cases}$$

Les équations (11.) donneront alors:

$$14.\quad \begin{cases} \frac{u_0+v_0}{-c^\varepsilon} = \varphi_0(y_1)+\varphi_0(y_2)+\dots\varphi_0(y_\nu), \\ \frac{u_1+v_1}{-c^\varepsilon} = \varphi_1(y_1)+\varphi_1(y_2)+\dots\varphi_1(y_\nu), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{u_\varrho+v_\varrho}{-c^\varepsilon} = \varphi_\varrho(y_1)+\varphi_\varrho(y_2)+\dots\varphi_\varrho(y_\nu), \end{cases}$$

et on aura par conséquent:

$$15.\quad \begin{cases} y_1 = \lambda_1\left(\frac{u_0+v_0}{-c^s}, \frac{u_1+v_1}{-c^s}, \dots \frac{u_\varrho+v_\varrho}{-c^s}\right), \\ y_2 = \lambda_2\left(\frac{u_0+v_0}{-c^s}, \frac{u_1+v_1}{-c^s}, \dots \frac{u_\varrho+v_\varrho}{-c^s}\right), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_\nu = \lambda_\nu\left(\frac{u_0+v_0}{-c^s}, \frac{u_1+v_1}{-c^s}, \dots \frac{u_\varrho+v_\varrho}{-c^s}\right), \end{cases}$$

où c est une racine quelconque de l'équation $x^n - 1 = 0$. *Les fonctions inverses $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu$ ont donc la propriété que les fonctions représentées par les seconds membres des équations (15.) sont des racines d'une équation du degré ν dont les coëfficiens sont des fonctions algébriques des fonctions représentées par les seconds membres des équations (13.).* Cette propriété, analogue à celle des fonctions trigonométriques et elliptiques, est une conséquence immédiate des théorèmes 5. et 8., ou plutôt ces théorèmes mêmes, présentés seulement sous une autre forme l'expriment. On peut aussi présenter ces théorèmes de la manière suivante:

Les $\varrho+1$ équations différentielles linéaires du premier ordre

$$16.\quad \begin{cases} \frac{x_1^{s-\gamma p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s}} + \frac{x_2^{s-\gamma p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^s}} + \dots \frac{x_q^{s-\gamma p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^s}} = 0, \\ \frac{x_1^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s}} + \frac{x_2^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^s}} + \dots \frac{x_q^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^s}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_1^{s+(\varrho-\gamma)p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^s}} + \frac{x_2^{s+(\varrho-\gamma)p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^s}} + \dots \frac{x_q^{s+(\varrho-\gamma)p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^s}} = 0, \end{cases}$$

entre les q variables: $x_1, x_2, \dots x_q$ ont ν intégrales algébriques complètes, en étendant la définition des fonctions algébriques aux racines d'une équation algébrique.

Note rélative au chapitre 2.

Si l'on suppose, comme dans le théorème 13., que la fonction $F(x^p)$ soit de la forme:

$$1.\quad F(x^p) = C_0 + C_1 x^p + C_2 x^{2p} + \dots C_\varrho x^{\varrho p},$$

en désignant par σ le nombre entier immédiatement moindre que:

$$\gamma + \frac{(n-s)(m+r)}{n} - r;$$

en faisant de plus:

$$2. \quad P(x) = \int \frac{x^{s-\gamma p-1}F(x^p)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}}$$

et en soumettant cette fonction à la condition de s'évanouir avec x, on aura en vertu des théorèmes 13. et 15.:

$$3. \quad P(x_1) + P(x_2) + \dots P(x_\mu) = -c^{n-s}(P(y_1) + P(y_2) + \dots P(y_\nu)),$$

μ étant un nombre entier quelconque et $\nu = \frac{m(n-1) - r - b' + 2}{2}$, b' désignant le plus grand facteur commun de $m+r$ et n, c étant une quelconque des valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$, $x_1, x_2, \dots x_\mu$ étant des quantités arbitraires, les racines dans les fonctions: $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... $P(x_\mu)$ étant arbitraires, $y_1, y_2, \dots y_\nu$ des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \dots x_\mu$ et des racines $\sqrt[n]{(R(x_1^p))}$, $\sqrt{(R(x_2^p))}$, ... $\sqrt{(R(x_\mu^p))}$ et les racines dans les fonctions $P(y_1)$, $P(y_2)$, ... $P(y_\nu)$ étant déterminées par les racines dans les fonctions $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... $P(x_\mu)$ et par la valeur de c. Pour déterminer ces quantités on formera les fonctions suivantes:

$$4. \quad \begin{cases} f_0(x) = x^g\left(b_0 + b_1x^p + b_2x^{2p} + \dots b_{\nu+q_\varrho}x^{(\nu+q_\varrho)p}\right), \\ f_1(x) = x^{g+1}\left(b'_0 + b'_1x^p + b'_2x^{2p} + \dots b'_{\nu+q_{\varrho-1}}x^{(\nu+q_{\varrho-1})p}\right), \\ f_2(x) = x^{g+2}\left(b''_0 + b''_1x^p + b''_2x^{2p} + \dots b''_{\nu+q_{\varrho-2}}x^{(\nu+q_{\varrho-2})p}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{p-g-1}(x) = x^{p-1}\left(b_0^{(p-g-1)} + b_1^{(p-g-1)}x^p + b_2^{(p-g-1)}x^{2p} + \dots b^{(p-g-1)}_{\nu+q_{\varrho-p+g+1}}x^{(\nu+q_{\varrho-p+g+1})p}\right), \\ f_{p-g}(x) = \left(b_0^{(p-g)} + b_1^{(p-g)}x^p + b_2^{(p-g)}x^{2p} + \dots b^{(p-g)}_{\nu+q_{\varrho-p+g}}x^{(\nu+q_{\varrho-p+g})p}\right), \\ f_{p-g+1}(x) = x\left(b_0^{(p-g+1)} + b_1^{(p-g+1)}x^p + b_2^{(p-g+1)}x^{2p} + \dots b^{(p-g+1)}_{\nu+q_{\varrho-p+g-1}}x^{(\nu+q_{\varrho-p+g-1})p}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x) = x^{g-1}\left(b_0^{(n-1)} + b_1^{(n-1)}x^p + b_2^{(n-1)}x^{2p} + \dots b^{(n-1)}_{\nu+q_{\varrho-n+1}}x^{(\nu+q_{\varrho-n+1})p}\right), \end{cases}$$

où q_z désigne le nombre entier contenu dans la fraction $\frac{z(m+\nu)}{n}$. Dans ces équations on peut donner à g une valeur entière positive quelconque plus petite que p et à ϱ une valeur entière quelconque telle que $\mu + \nu - rg - \varrho(m+r)$

soit divisible par n. En ajoutant au quotient de ces deux nombres le nombre entier que contient la fraction $\frac{s+\varrho}{p}$, la somme sera $= v$.

De plus il faut faire:

$$5.\quad \begin{cases} B_1(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad \dots f_{n-1}(x)(c_1\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \\ B_2(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1^2\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1^2\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad \dots f_{n-1}(x)(c_1^2\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_n(x) = f_0(x)+f_1(x)(c_1^n\sqrt[n]{(R(x^p))})+f_2(x)(c_1^n\sqrt[n]{(R(x^p))})^2+\dots \\ \qquad\qquad \dots f_{n-1}(x)(c_1^n\sqrt[n]{(R(x^p))})^{n-1}, \end{cases}$$

c_1 étant une des valeurs imaginaires de $((1))^{\frac{1}{n}}$, ou $c_1 = -1$, si $n = 2$.

En donnant maintenant à un des coëfficiens des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ une valeur arbitraire mais différente de zéro, on déterminera les μ autres coëfficiens par les μ équations suivantes:

$$6.\quad \begin{cases} f_0(x_1)+f_1(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))}+f_2(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))^2}+\dots f_{n-1}(x_1)\sqrt[n]{(R(x_1^p))^{n-1}} = 0, \\ f_0(x_2)+f_1(x_2)\sqrt[n]{(R(x_2^p))}+f_2(x_2)\sqrt[n]{(R(x_2^p))^2}+\dots f_{n-1}(x_2)\sqrt[n]{(R(x_2^p))^{n-1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_0(x_\mu)+f_1(x_\mu)\sqrt[n]{(R(x_\mu^p)}+f_2(x_\mu)\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^2}+\dots f_{n-1}(x_\mu)\sqrt[n]{(R(x_\mu^p))^{n-1}} = 0, \end{cases}$$

en donnant dans la première de ces équations à $\sqrt[n]{(R(x_1^p))}$ la valeur qu'elle a dans la fonction $P(x_1)$, dans la seconde à $\sqrt[n]{(R(x_2^p))}$ celle qu'elle a dans la fonction $P(x_2)$, et ainsi de suite:

Les quantités y_1, y_2, ... y_ν se trouveront alors déterminées par l'équation

$$7.\quad B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)$$
$$= M(x^p-x_1^p)(x^p-x_2^p)\dots.(x^p-x_\mu^p)(x^p-y_1^p)(x^p-y_2^p)\dots.(x^p-y_\nu^p),$$

M étant une constante, et elles seront par conséquent les racines de l'équation du degré ν:

$$8.\quad \frac{B_1(x).B_2(x)\dots.B_n(x)}{(x^p-x_1^p)(x^p-x_2^p)\dots.(x^p-x_\mu^p)} = 0.$$

Les valeurs de $\sqrt[n]{(R(y_1^p)}$, $\sqrt[n]{(R(y_2^p)}$, ... $\sqrt[n]{(R(y_\nu^p)}$ dans les fonctions $P(y_1)$, $P(y_2)$, ... $P(y_\nu)$ seront déterminées par les équations suivantes:

$$9.\quad \begin{cases} \sqrt[n]{(R(y_1^p))^{n-s}} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_1)}{C_{k+s-n}(y_1)} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_1)}{C_{k+s}(y_1).R(y_1^p)}, \\ \sqrt[n]{(R(y_2^p))^{n-s}} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_2)}{C_{k+s-n}(y_2)} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_2)}{C_{k+s}(y_2).R(y_2^p)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[n]{(R(y_\nu^p))^{n-s}} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_\nu)}{C_{k+s-n}(y_\nu)} = \dfrac{c^{n-s}.C_k(y_\nu)}{C_{k+s}(y_\nu).R(y_\nu^p)}, \end{cases}$$

où k est un nombre entier positif quelconque et où $C_\varrho(x)$ désigne le coëfficient de $df_\varrho(x)$ dans la differentielle du produit $B_1(x).B_2(x)\ldots.B_n(x)$ par rapport à $f_\varrho(x)$. Les quantités $y_1, y_2, \ldots. y_\nu$ sont absolument indépendantes des coëfficiens de x^p dans la fonction $F(x^p)$. En faisant donc:

$$10.\quad \psi_k(x) = \int \frac{x^{s-rp-1}.x^{kp}.dx}{\sqrt[n]{(R(x^p))^{n-s}}},$$

et en faisant: $\mu = 2\nu$, $x_{\nu+1} = x'_1$, $x_{\nu+2} = x'_2$, $\ldots.$ $x_{2\nu} = x'_\nu$, l'équation (8.) entrainera les suivantes:

$$11.\quad \begin{cases} \left\{\begin{matrix} \psi_0(x_1)+\psi_0(x_2)+\ldots.\psi_0(x_\nu) \\ +\psi_0(x'_1)+\psi_0(x'_2)+\ldots.\psi_0(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^{n-s}(\psi_0(y_1)+\psi_0(y_2)+\ldots.\psi_0(y_\nu)), \\ \left\{\begin{matrix} \psi_1(x_1)+\psi_1(x_2)+\ldots.\psi_1(x_\nu) \\ +\psi_1(x'_1)+\psi_1(x'_2)+\ldots.\psi_1(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^{n-s}(\psi_1(y_1)+\psi_1(y_2)+\ldots.\psi_1(y_\nu)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\{\begin{matrix} \psi_\sigma(x_1)+\psi_\sigma(x_2)+\ldots.\psi_\sigma(x_\nu) \\ +\psi_\sigma(x'_1)+\psi_\sigma(x'_2)+\ldots.\psi_\sigma(x'_\nu)\end{matrix}\right\} = -c^{n-s}(\psi_\sigma(y_1)+\psi_\sigma(y_2)+\ldots.\psi_\sigma(y_\nu)). \end{cases}$$

Il y a maintenant à remarquer qu'on a toujours $\nu > \sigma$. Pour démontrer cela, nous considérerons séparement les trois cas: $m+r=n$, $m+r<n$, $m+r>n$.

Si $m+r=n$, on a: $b'=n$, $\nu=\frac{n}{2}(n-r-2)+1$; de plus la plus grande valeur de σ sera $n-r-2$. Donc parceque $\frac{n}{2} =$ ou >1: $\frac{n}{2}(n-r-2)+1 > n-r-2$, ou $\nu > \sigma$.

Si $m+r<n$, la plus grande valeur de b' sera $=\frac{n}{2}$, si $m>1$, et $=\frac{n}{3}$, si $m=1$; σ sera toujours plus petit que $\frac{m(n-1)-r}{n}$. Donc si $m=1$:

$$\frac{n^2}{2}-2n+2 > \frac{n^2}{3}-2n,$$

$$(n-2)\left(\frac{n}{2}-1\right) > n\left(\frac{n}{3}-2\right).$$

Mais parceque $r+1<n$, $r=$ ou $<\frac{n}{2}$ et $n-r=$ ou $>\frac{n}{2}$; donc

$$(n-2)(n-1-r)>n\left(\frac{n}{3}-2\right),$$

$$n\left(n-1-r-\frac{n}{3}+2\right)>2(n-1-r)$$

ou $$\nu>\sigma.$$

Si $m>1$, on a:

$$2m-3>0,$$

$$(2m-3)\left(\frac{n}{2}-1\right)n>-2(m+r),$$

$$mn^2-\frac{3n^2}{2}-2mn+3n>-2(m+r),$$

$$mn^2+3n-\frac{3n^2}{2}>2mn-2m-2r,$$

$$n\left(mn+3-\frac{n}{2}-n\right)>2(mn-m-r).$$

Mais $b'=<\frac{n}{2}$, et $m+r=$ ou $<n-1$,

donc $n(mn+2-m-r-b')>2(mn-m-r)$,

ou $n(m(n-1)-r-b'+2)>2(mn-m-r)$,

$$\nu>\sigma.$$

Si enfin $m+r>n$, on a toujours $(n-2)(mn-m-r)=$ ou $>n(b'-2)$. En effet, si $n=2$, cela est évident, b' étant tout au plus $=n$. Si $n>2$ et $m=1$, on a; $r=n$, $b'=1$, donc $(n-2)(mn-m-r)=$ ou $>n(b'-2)$; si $n>2$ et $m=2$, on a: $r>n-2$, donc $r=n$, $b'=$ ou $<\frac{n}{2}$, $(n-2)(mn-m-r)=$ ou $>n\left(\frac{n}{2}-2\right)$, donc $(n-2)(mn-m-r)$ $=$ ou $>n(b'-2)$; si enfin $n>2$ et $m=$ ou >3, on a

$(m-2)n=$ ou $>n$, donc, parceque $r=$ ou $<n$:

$n+m+r=$ ou $<mn$,

$n=$ ou $<mn-m-r$.

Mais $b'-2=$ ou $<n-2$, donc:

$n(b'-2)=$ ou $<(n-2)(mn-m-r)$.

On a donc toujours $(n-2)(mn-m-r)=$ ou $>n(b'-2)$; donc $n(mn-m-r-b'+2)=$ ou $>2(mn-m-r)$ et $\frac{m(n-1)-r-b'+2}{2}=$ ou $>\frac{m(n-1)-r}{n}$, ou $\nu>\sigma$.

Donc toujours $\nu =$ ou $> \sigma+1$, c'est à dire, le nombre des équations (11.) est toujours égal à ν ou plus petit que ν. En faisant maintenant pour abréger:

$$12.\quad \begin{cases} \psi_0(x_1)+\psi_0(x_2)+\ldots.\psi_0(x_\nu) = u'_0, \\ \psi_1(x_1)+\psi_1(x_2)+\ldots.\psi_1(x_\nu) = u'_1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \psi_\sigma(x_1)+\psi_\sigma(x_2)+\ldots.\psi_\sigma(x_\nu) = u'_\sigma, \\ \psi_0(x'_1)+\psi_0(x'_2)+\ldots.\psi_0(x'_\nu) = v'_0, \\ \psi_1(x'_1)+\psi_1(x'_2)+\ldots.\psi_1(x'_\nu) = v'_1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \psi_\sigma(x'_1)+\psi_\sigma(x'_2)+\ldots.\psi_\sigma(x'_\nu) = v'_\sigma, \end{cases}$$

le nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots. x_\nu$ sera toujours égal à celui des quantités $u'_0, u'_1, u'_2, \ldots. u'_\sigma$ ou plus grand que ce nombre, et de même, le nombre des quantités $x'_1, x'_2, \ldots. x'_\nu$ sera toujours égal à celui des quantités $v'_0, v'_1, \ldots. v'_\sigma$ ou plus grand. On peut donc toujours supposer des fonctions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots. \lambda'_\nu$ telles que:

$$13.\quad \begin{cases} x_1 = \lambda'(u'_0, u'_1, u'_2, \ldots. u'_\sigma), \\ x_2 = \lambda'_2(u'_0, u'_1, u'_2, \ldots. u'_\sigma), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_\nu = \lambda'_\nu(u'_0, u'_1, u'_2, \ldots. u'_\sigma), \\ x'_1 = \lambda'_1(v'_0, v'_1, v'_2, \ldots. v'_\sigma), \\ x'_2 = \lambda'_2(v'_0, v'_1, v'_2, \ldots. v'_\sigma), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x'_\nu = \lambda'_\nu(v'_0, v'_1, v'_2, \ldots. v'_\sigma). \end{cases}$$

Les équations (11.) donneront alors:

$$14.\quad \begin{cases} \frac{u'_0+v'_0}{-c^{n-\mu}} = \psi_0(y_1)+\psi_0(y_2)+\ldots.\psi_0(y_\nu), \\ \frac{u'_1+v'_1}{-c^{n-\mu}} = \psi_1(y_1)+\psi_1(y_2)+\ldots.\psi_1(y_\nu), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{u'_\sigma+u'_\sigma}{-c^{n-\mu}} = \psi_\sigma(y_1)+\psi_\sigma(y_2)+\ldots.\psi_\sigma(y_\nu), \end{cases}$$

et on aura par conséquent

$$15.\quad \begin{cases} y_1 = \lambda'_1\left(\frac{u'_0+v'_0}{-c^{n-s}},\ \frac{u'_1+v'_1}{-c^{n-s}},\ \dots\ \frac{u'_\sigma+v'_\sigma}{-c^{n-s}}\right), \\ y_2 = \lambda'_2\left(\frac{u'_0+v'_0}{-c^{n-s}},\ \frac{u'_1+v'_1}{-c^{n-s}},\ \dots\ \frac{u'_\sigma+v'_\sigma}{-c^{n-s}}\right), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_\nu = \lambda'_\nu\left(\frac{u'_0+v'_0}{-c^{n-s}},\ \frac{u'_0+v'_1}{-c^{n-s}},\ \dots\ \frac{u'_\sigma+v'_\sigma}{-c^{n-s}}\right), \end{cases}$$

où c est une racine quelconque de l'équation $z^n-1=0$. *Donc les fonctions inverses $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_\nu$ ont la propriété que les fonctions représentées par les seconds membres des équations (15.) sont des racines d'une équation du degré ν, et les coëfficiens sont des fonctions algébriques des fonctions représentées par les seconds membres des équations (13.).* Cette propriété est une conséquence immédiate des théorèmes 13. et 15., qui peuvent aussi être exprimées de la manière suivante:

Les $\sigma+1$ équations différentielles linéaires du premier ordre:

$$16.\quad \begin{cases} \frac{x_1^{s-\gamma p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^{n-s}}} + \frac{x_2^{s-\gamma p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^{n-s}}} + \dots \frac{x_q^{s-\gamma p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^{n-s}}} = 0, \\ \frac{x_1^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^{n-s}}} + \frac{x_2^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^{n-s}}} + \dots \frac{x_q^{s-(\gamma-1)p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^{n-s}}} = 0, \\ \cdot \\ \frac{x_1^{s+(\sigma-\gamma)p-1}.dx_1}{\sqrt[n]{(R(x_1^p))^{n-s}}} + \frac{x_2^{s+(\sigma-\gamma)p-1}.dx_2}{\sqrt[n]{(R(x_2^p))^{n-s}}} + \dots \frac{x_q^{s+(\sigma-\gamma)p-1}.dx_q}{\sqrt[n]{(R(x_q^p))^{n-s}}} = 0, \end{cases}$$

entre les q variables $x_1, x_2, \dots x_q$ ont ν intégrales algébriques complètes, en étendant la définition des fonctions algébriques aux racines d'une équation algébrique.

9.

Ueber Reihen von Kegelschnitten in einer Ebene, welche sich in denselben vier Puncten schneiden.

(Von Herrn *Jacobi*, Königl. Preufs. Lieutenant in der sechsten Artillerie-Brigade zu Breslau.)

In der „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, von Herrn *Steiner*" bilden die Gerade und der Strahlenbüschel die Grundlage der Entwicklungen. Man sieht, dafs zwei projectivische Geraden zwei collineare Systeme bilden, in denen die Puncte jedes Systems in einer Geraden liegen; eben so stellen zwei projectivische Strahlenbüschel zwei collineare Systeme dar, in denen die Geraden jedes Systems durch einen und denselben Punct gehen.

So wie nun zwei schief liegende Geraden oder Strahlenbüschel, welche projectivisch sind, einen Kegelschnitt erzeugen: eben so erzeugen zwei nicht collinear liegende collineare Systeme Reihen von Kegelschnitten, welche sich in denselben drei Puncten schneiden, oder dieselben drei Geraden berühren.

Es ist kein Zweifel, dafs die Gesetze der Collineation und Reciprocität sich allgemein nach der Methode des Herrn *Steiner* entwickeln lassen. Besonders wichtig hierbei ist, dafs diese Geometrie durch besondre Lagen der Grundgebilde das Imaginäre der Analysis in ihr Gebiet zieht.

Legt man zwei projectivische Geraden so aufeinander, dafs die Durchschnitte der Parallelstrahlen sich decken, so bilden die entsprechenden Punctenpaare beider Geraden conjugirte Puncte der Involution. Liegen die Geraden ungleich liegend, so giebt es zwei Puncte: die doppelten Puncte der Involution, in denen entsprechende Puncte beider Geraden sich decken. Es giebt keine doppelten Puncte, wenn die Geraden gleichliegend liegen. Der Centralpunct ist der Punct, in welchem die Durchschnitte der Parallelstrahlen sich decken.

Zwei projectivisch ähnliche oder gleiche Geraden bilden immer ein Involutionssystem, wenn sie zur Deckung gelangen.

§. 1.

Je zwei entsprechende Puncte a und a' der beiden collinearen Systeme M und M' sind die Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen entsprechende Geraden jener Systeme sind. Diese Strahlenbüschel liegen schief, wenn die Systeme nicht collinear liegen, und erzeugen einen Kegelschnitt (aa').

In den drei Situationspuncten der nicht collinear liegenden Systeme decken sich entsprechende Punctenpaare; einer dieser Puncte ist stets reell; zwei können imaginär werden; alle drei liegen nie in einer Geraden.

Die Situationspuncte sind die Mittelpuncte zweier concentrischen projectivischen Strahlenbüschel. Alle Kegelschnitte (aa') schneiden sich in den drei Situationspuncten, weil letztere stets die Durchschnitte entsprechender Strahlen sind.

Liegen die Puncte a, b, c, ... des einen Systems in einer Geraden, so gehen alle Kegelschnitte (aa'), (bb'), ... durch einen bestimmten vierten Punct, den Durchschnitt der Geraden ab und $a'b'$.

Im Allgemeinen enthält jeder durch zwei collineare Systeme bestimmte Kegelschnitt nur ein Paar entsprechende Puncte derselben, welche sich nicht decken, da in beiden Systemen nur entsprechende Puncte Mittelpuncte projectivischer Strahlenbüschel sind.

Je zwei entsprechende Geraden α und α' der beiden collinearen Systeme M und M' sind in Ansehung der entsprechenden Puncte projectivisch, liegen im Allgemeinen schief, und erzeugen einen Kegelschnitt $(\alpha\alpha')$.

Alle Kegelschnitte $(\alpha\alpha')$ sind einem Dreiecke eingeschrieben, dessen Seiten die Situations-Axen sind, da letztere alle entsprechende Geraden in entsprechenden Puncten schneiden.

Es möge noch erwähnt werden, daſs, wenn von zwei collinearen Systemen die Rede ist, dieselben nicht collinear liegend gedacht werden.

§. 2.

Zwei collineare Systeme M und M' sind mit einem und demselben Systeme P reciprok verwandt. Hieraus ergiebt sich sogleich, aus den bekannten gegenseitigen Beziehungen der Systeme, diejenige Verwandtschaft, nach welcher einer Geraden ein Kegelschnitt entspricht; alle diese Kegelschnitte schneiden sich in drei festen Puncten, und allen Geraden, welche durch einen Punct gehen, entsprechen Kegelschnitte, welche sich in einem und demselben vierten Puncte schneiden. Es ergiebt sich nemlich Folgendes:

A. In P entsprechen:	in M und M':
Jedem Puncte	In jedem System eine Gerade (Strahl).
Allen Puncten einer Geraden	Zwei projectivische Strahlenbüschel, welche einen Kegelschnitt erzeugen.
Vier harmonischen Puncten einer Geraden	Vier harmonische Puncte eines Kegelschnitts.
Allen Geraden, welche sich in einem Puncte schneiden,	Kegelschnitte, welche durch einen bestimmten vierten Punct gehen.
Dreien bestimmten Geraden	Die drei Situationspuncte.
U. s. w.	U. s. w.

B. In P entsprechen:	in M und M':
Jeder Geraden	In jedem System ein Punct.
Jedem Strahlenbüschel	Zwei projectivische Geraden, welche einen Kegelschnitt erzeugen.
Allen Strahlenbüscheln, deren Mittelpuncte in einer Geraden liegen,	Kegelschnitte, welche eine gemeinschaftliche vierte Tangente haben.
Dreien bestimmten Strahlenbüscheln	Die drei Situations-Axen.
U. s. w.	U. s. w.

§. 3.

Es mögen jetzt die Kegelschnitte, welche sich in denselben vier Puncten schneiden, noch aus einem andern Gesichtspunct betrachtet werden.

Sind vier Puncte gegeben, welche allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sein sollen, so kann zu jedem fünften Puncte nur ein Kegelschnitt gefunden werden. Wir stellen uns jetzt die ganze Reihe der durch vier Puncte möglichen Kegelschnitte vor. Alsdann kann man drei beliebige jener vier Puncte als Situationspuncte und durch den vierten Punct zwei beliebige Geraden als entsprechende Geraden zweier collinearen Systeme annehmen. Dies ist möglich, weil durch diese vier Geraden beider Systeme und das Entsprechen derselben, die collinearen Systeme bestimmt sind. Die durch den vierten Punct gehenden Geraden schneiden jeden Kegelschnitt in entsprechenden Puncten beider Systeme. Man kann nun ferner alle Puncte eines Kegelschnitts als entsprechende Puncte einer Reihe von collinearen Systemen ansehen. Alle diese Systeme haben dieselben drei Si-

tuationspuncte, und alle übrigen Puncte jedes Systems liegen in einer Geraden, welche durch den gemeinschaftlichen vierten Punct der Kegelschnitte geht. Alle diese Geraden sind unter sich projectivisch und liegen schief.

Diese Betrachtungen führen unmittelbar zu einer Reihe von Sätzen.

1. Schneiden sich vier Kegelschnitte in denselben vier Puncten, und legt man durch einen dieser Puncte zwei Geraden, welche jene Kegelschnitte schneiden, so sind die Doppelverhältnisse aus den Entfernungen der entsprechenden Durchschnittspuncte in beiden Geraden gleich.

Diese beiden Geraden schneiden die Seiten desjenigen Dreiecks, welches die andern drei gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Kegelschnitte bilden, in entsprechenden Puncten.

2. Ist einem Kegelschnitte ein Dreieck eingeschrieben, und zieht man durch einen Punct des ersten zwei Gerade, welche die drei Seiten des Dreiecks und den Kegelschnitt schneiden, so erhält man in jeder Geraden vier Puncte, und die Doppelverhältnisse aus den Entfernungen dieser vier Puncte in beiden Geraden sind einander gleich.

Hierin liegt offenbar die Construction eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Puncten. Man beachte dabei nur, dafs die in einer Seite des Dreiecks liegenden Puncte beider Geraden entsprechende Puncte sind.

3. Ist einem Kegelschnitte ein Dreieck eingeschrieben, und drehen sich zwei Gerade, welche sich stets im Kegelschnitte schneiden, um zwei feste Puncte einer Seite des Dreiecks, so sind die Doppelverhältnisse aus den Entfernungen der jedesmaligen Durchschnittspuncte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte von den beiden andern Seiten des Dreiecks, constant; und zwar gleich dem Doppelverhältnisse aus den Entfernungen der beiden festen Puncte von jenen Seiten des Dreiecks.

4. Ist einem Kegelschnitte ein Viereck eingeschrieben, so ist das Doppelverhältnifs aus den Entfernungen jedes Punctes des Kegelschnitts von den vier Seiten des Vierecks, constant.

Diesen Beziehungen liegen die metrischen Relationen collinearer Systeme zum Grunde.

5. Schneiden sich eine Reihe von Kegelschnitten in denselben vier Puncten, und zieht man durch einen dieser Puncte zwei Geraden, welche jene Kegelschnitte schneiden, so berühren diese Geraden und alle durch sie bestimmten Sehnen der Kegelschnitte einen und denselben Kegelschnitt. Die drei Situations-Axen sind ebenfalls Tangenten des Kegelschnitts.

6. Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte eingeschrieben, so berühren die Seiten dieser Dreiecke einen neuen Kegelschnitt.

7. Die Eckpuncte zweier einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke liegen in einem Kegelschnitt. Oder:

8. Je vier Tangenten eines Kegelschnitts werden von jeder fünften Tangente projectivisch geschnitten.

§. 4.

Bei den hier angestellten Betrachtungen wird die Ansicht zum Grunde gelegt, dafs zwei oder mehrere Kegelschnitte, welche in einem Puncte eine einfache oder höhere Osculation haben, an dieser Stelle zwei oder mehrere nächst anliegende Puncte gemein haben.

Haben eine Reihe von Kegelschnitten zwei Puncte gemeinschaftlich, und berühren sie sich in einem und demselben dritten Puncte, so sind diese drei Puncte die Situationspuncte collinearer Systeme. Je zwei durch den Berührungspunct gehende Geraden liegen perspectivisch und werden von der gemeinschaftlichen Sehne aller Kegelschnitte in entsprechenden Puncten geschnitten.

9. Berühren sich eine Reihe von Kegelschnitten in einem Puncte, und schneiden sie sich in zwei andern Puncten, so gehen alle von zwei durch den Berührungspunct gezogenen Geraden bestimmten Sehnen der Kegelschnitte durch einen Punct der gemeinschaftlichen Sehne.

Bei einer Reihe von Kegelschnitten, welche sich in denselben beiden Puncten berühren, sind die beiden Tangenten in diesen Puncten und die gemeinschaftliche Sehne die drei Situations-Axen. Legt man durch einen Berührungspunct zwei beliebige Geraden, so liegen dieselben perspectivisch und werden von der Tangente im andere Berührungspuncte in entsprechenden Puncten geschnitten.

10. Wenn eine Reihe von Kegelschnitten sich in denselben beiden Puncten berühren, und man zieht durch einen Berührungspunct zwei die Kegelschnitte schneidende Geraden, so gehen alle durch diese Geraden bestimmten Sehnen der Kegelschnitte durch einen Punct der Tangente im zweiten Berührungspuncte. Aus der im Anfange angeführten Bemerkung folgt zunächst:

11. Wenn eine Reihe von Kegelschnitten sich in denselben beiden Puncten berühren, und man zieht durch einen Berührungspunct eine die

Kegelschnitte schneidende Gerade, so gehen alle Tangenten der Kegelschnitte, deren Berührungspuncte in dieser Geraden liegen, durch einen Punct der gemeinschaftlichen Tangente im zweiten Berührungspuncte.

Zieht man durch jeden der beiden Berührungspuncte einer Reihe von Kegelschnitten eine Gerade, so bestimmen alle Tangenten derselben, deren Berührungspuncte in diesen Geraden liegen, mit den beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller Kegelschnitte die diesen letztern umschriebenen Vierecke. Diese Vierecke haben zwei gegenüberliegende Ecken und zwei gegenüberliegende Seiten gemeinschaftlich. Die Eigenschaft der den Kegelschnitten umschriebenen Vierecke giebt Folgendes.

12. Wenn eine Reihe von Kegelschnitten sich in denselben beiden Puncten berühren, und man legt durch diese beiden Puncte zwei Geraden, welche die Kegelschnitte schneiden, so schneiden sich die durch letztere Geraden bestimmten Sehnen derselben in einem Puncte der gemeinschaftlichen Sehne aller Kegelschnitte.

Wenn eine Reihe von Kegelschnitten sich in einem Puncte dreipunctig osculiren und in einem zweiten Puncte schneiden, so enthält dieser letztere Punct einen und der Osculationspunct zwei Situationspuncte, und es folgt daraus, dafs

13. Bei einer Reihe von Kegelschnitten, welche sich in einem Puncte dreipunctig osculiren und in einem zweiten Puncte schneiden, alle durch zwei durch den Osculationspunct gezogene Geraden bestimmten Sehnen der Kegelschnitte durch einen Punct der gemeinschaftlichen Sehne aller Kegelschnitte gehen.

14. Zieht man durch den Osculationspunct einer Reihe sich in denselben Puncte vierpunctig osculirenden Kegelschnitte zwei dieselben schneidende Geraden, so gehen die hierdurch bestimmten Sehnen der Kegelschnitte durch einen Punct der gemeinschaftlichen Tangente im Osculationspunct.

Die hier angeführten Sätze, so wie die an dieselben sich knüpfenden Constructionen, sind in den „Analytisch-geometrischen Entwicklungen von Herrn *Plücker*, Band I. §. 8." enthalten.

Es liefsen sich hier noch viele Sätze aufstellen. Die hier gegebenen Beziehungen zeigen, in wie fern solche zwei Kegelschnitte als collineare und collinear-liegende Systeme angesehn werden können.

§. 5.

Bringen wir die in §. 3. aufgestellten Reihen von collinearen Systemen mit einem reciproken Systeme in Verbindung, so sehen wir, dafs in selbigem allen Puncten eines Kegelschnitts eine einzige Gerade entspricht. Die allen Kegelschnitten entsprechenden Geraden schneiden sich in einem und demselben Puncte, weil alle Puncte eines Systems in einer Geraden liegen.

15. Sind eine Reihe von Kegelschnitten einem Vierecke umschrieben, so gehen die Polaren jedes beliebigen Punctes dieser Kegelschnitte durch einen und denselben Punct, und alle Puncte eines Kegelschnitts haben eine einzige Polare.

Aus den metrischen Relationen reciproker Systeme ergiebt sich, dafs jede die Kegelschnitte schneidende Transversale zwei sich deckende projectivische Geraden enthält; und zwar sind die in einem Kegelschnitte liegenden Puncte entsprechende Puncte. Je zwei solcher Puncte enthalten zwei Paare entsprechenden Puncte der Geraden; welches der allgemeine Character der Involution ist.

16. Eine Reihe von Kegelschnitten, welche einem Viereck umschrieben sind, werden von jeder beliebigen Transversale in Puncten geschnitten, welche ein Involutionssystem bilden. Die in einem Kegelschnitt liegenden Puncte sind conjugirte Puncte.

Jedes Seitenpaar des Vierecks, d. h., je zwei Gerade, welche die vier Puncte desselben verbinden, kann als ein Kegelschnitt angesehen werden, und es ergeben sich hieraus mehrere bekannte Sätze.

Zwei sich deckende projectivisch ähnliche oder gleiche Geraden bilden immer ein Involutionssystem. Diese Bemerkung führt zu folgenden Beziehungen.

17. Schneiden sich drei Kegelschnitte in denselben vier Puncten, und werden dieselben von einer Transversale so geschnitten, dafs die in letzterer sich deckenden Geraden projectivisch ähnlich sind, so schneiden je drei andre Kegelschnitte, welche durch dieselben vier Puncte gehen, diese Transversale ebenfalls ähnlich.

18. Werden zwei einem Vierecke umschriebene Kegelschnitte von einer Transversale so geschnitten, dafs die Abschnitte derselben zwischen beiden Kegelschnitten gleich sind, so besteht diese Gleichheit der Abschnitte

in derselben Transversale auch für je zwei andre dem Vierecke umschriebenen Kegelschnitte.

In diesem letztern Falle decken sich alle Mittelpuncte der Entfernungen conjugirter Puncte. Dies kann noch besonders aus folgenden allgemeinen Gleichungen der Involution bewiesen werden, in welchen b und b' conjugirte Puncte, und β der Halbirungspunct von bb' ist, u. s. w.; nemlich:

$$mb.mb'.\delta\mu = md.md'.\beta\mu,$$
$$mb.mb'.\varepsilon\mu = me.me'.\beta\mu,$$
$$md.md'.\varepsilon\mu = me.me'.\delta\mu,$$

wenn man $\beta\mu = 0$ setzt.

Berührt eine Transversale einen Kegelschnitt, so ist dieser Berührungspunct ein doppelter Punct. Die doppelten Puncte sind immer paarweise vorhanden.

19. Durch vier Puncte lassen sich im Allgemeinen zwei Kegelschnitte legen, welche eine gegebene Gerade berühren.

Die Theorie der Involution giebt ferner ein Mittel an die Hand, zu entscheiden, ob durch vier Puncte ein Kegelschnitt gelegt werden kann, der eine gegebene Gerade berührt. Man verlängere nemlich die drei Seitenpaare des Vierecks, bis sie die Gerade schneiden. Diese sechs Puncte bilden ein Involutionssystem. Liegen die in der Geraden sich deckenden projectivischen Geraden ungleichliegend, so giebt es zwei doppelte Puncte und es sind zwei Kegelschnitte möglich; liegen jene Geraden aber gleichliegend, so ist im Allgemeinen kein Kegelschnitt möglich. Im letztern Falle mufs man noch untersuchen, ob die Geraden ähnlich sind, d. h. ob der Centralpunct in unendlicher Entfernung liegt. Sind die Geraden gleich und gleichliegend, so ist nur ein Kegelschnitt möglich, und dieser ist eine Hyperbel.

Aus der Betrachtung der doppelten Puncte folgt noch unmittelbar Nachstehendes.

20. Ist ein Viereck einem Kegelschnitte eingeschrieben, und zieht man durch einen aufserhalb des letztern liegenden Durchschnitt eines Seitenpaares des Vierecks eine Tangente an denselben, so schneidet diese Tangente jedes andre Seitenpaar in Bezug auf die doppelten Puncte harmonisch.

Dieser Satz führt zu der bekannten Construction einer Tangente eines Kegelschnittes.



21. Ist eine Reihe von Kegelschnitten einem Vierecke umschrieben, und legt man von dem Durchschnitt eines Seitenpaares des letztern Tangenten an dieselben, so liegen sämmtliche Berührungspuncte dieser Tangenten in einer Geraden, welche die beiden andern Durchschnitte der Seitenpaare jenes Vierecks verbindet.

§. 6.

Man kann, wenn in einer Ebene vier Puncte gegeben sind, drei dieser Puncte als Situationspuncte und durch den vierten Punct eine beliebige Gerade als Collineations-Axe eines der collinearen Systeme annehmen. In den Collineations-Axen sind die unendlich entfernten Puncte entsprechende Puncte der Systeme. Eine Hyperbel, welche durch jene vier Puncte und den unendlich entfernten Punct jener Collineations-Axe geht, bestimmt die Collineations-Axe des zweiten Systems.

22. Durch jede vier Puncte einer Ebene lassen sich unzählig viele Hyperbeln legen.

Die Asymptoten berühren die Hyperbeln in den unendlich entfernten Puncten. In einer Transversale, deren Puncte ein Involutionssystem bilden, giebt es nur dann unendlich entfernte doppelte Puncte, wenn die in derselben sich deckenden Geraden projectivisch ähnlich oder gleich sind.

23. In jedem beliebigen Viereck kann nach jeder gegebenen Richtung eine Transversale gezogen werden, welche die Seitenpaare des Vierecks in entsprechenden Puncten a und a', b und b', c und c' schneidet, so dafs im Allgemeinen

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{ac}{a'c'} = \frac{bc}{b'c'}$$

ist. Diese Transversale ist die Asymptote einer Hyperbel, welche durch die vier Puncte des Vierecks geht.

Jede einer Asymptote parallele Transversale schneidet die Hyperbel im Centralpuncte der Involution.

Es ist also jede Hyperbel durch vier Puncte und die Richtung einer ihrer Asymptoten gegeben, und es findet sich ein fünfter Punct als Centralpunct der Involution dieser Richtung.

Rückt eine Transversale parallel mit sich selbst fort und schneidet die sechs Seiten eines gegebenen Vierecks, so beschreibt der Centralpunct

der Involution dieser Transversale eine Hyperbel, welche jenem Viereck umschrieben ist.

Zwei collineare Systeme sind vollständig bestimmt, wenn die drei Situationspuncte (oder Situations-Axen) und eine Collineations-Axe gegeben sind und der Punct bestimmt wird, in welchem die Collineations-Axen beider Systeme sich schneiden sollen.

§. 7.

Die vier Puncte einer Ebene können zwei von einander wesentlich verschiedene gegenseitige Lagen haben, nemlich:

1) Ein Punct liegt innerhalb des von den drei andern Puncten gebildeten Dreiecks. Ein solches Viereck werde durch *A* bezeichnet.

2) Jeder Punct liegt aufserhalb des von den drei andern Puncten gebildeten Dreiecks. Dieses Viereck heifse *B*.

In einem Viereck *A* liegen die Durchschnitte der Seitenpaare desselben in den Seiten des von den äufsern Puncten gebildeten Dreiecks. Jeder Kegelschnitt, welcher dem Viereck umschrieben ist, wird von einer Seite des eingeschriebenen Dreiecks geschnitten (unter eingeschriebenes Dreieck dasjenige verstanden, dessen Eckpuncte die Durchschnitte der Seitenpaare sind). Die beiden Durchschnitte des Kegelschnitts mit dieser Seite sind zwei zugeordnete harmonische Puncte zu den beiden in derselben Seite liegenden Eckpuncten des Dreiecks. Die Lage der harmonischen Puncte in einer Geraden zeigt, dafs kein Kegelschnitt dem Vierecke umschrieben werden kann, so dafs alle drei Durchschnitte der Seitenpaare desselben innerhalb dieses Kegelschnittes liegen. Zieht man nun von dem aufserhalb des Kegelschnitts liegenden Durchschnitt eines Seitenpaares Tangenten an denselben, so sieht man, dafs die vier Puncte des Vierecks auf verschiedenen Seiten der Tangenten liegen. Hieraus folgt sogleich Nachstehendes.

24. Um ein Viereck *A* lassen sich nur Hyperbeln beschreiben.

Jede beliebige vier Puncte einer Parabel bilden nothwendig ein Viereck *B*. Es lassen sich aber auch um dieses Viereck beliebig viele Hyperbeln legen. Eine unendlich entfernte Transversale schneidet diese Hyperbeln in Puncten, welche ein Involutionssystem bilden. Diese Transversale berührt die Parabel, und in dem Berührungspuncte liegt ein doppelter Punct der Involution; letztere sind aber immer paarweise vorhanden.



25. Durch jede vier Puncte einer Parabel läfst sich eine zweite Parabel beschreiben.

Hieraus folgern wir, da über die vier in einer Parabel gegebenen Puncte keine weitere Bestimmung gemacht werden kann, dafs sich

26. Um ein Viereck *B* zwei, aber auch nur zwei Parabeln legen lassen.

Durch die Seiten eines Vierecks *B* und die beiden um dasselbe beschriebenen Parabeln wird die Ebene in mehrere Theile zerlegt. Betrachten wir nun einen fünften Punct, so kann derselbe folgende Lagen haben:

1) Innerhalb des Vierecks;

2) In den Räumen der Scheitelwinkel des gegebenen Vierecks.

In beiden Lagen lassen sich durch die fünf Puncte nur Hyperbeln legen, weil vier dieser Puncte stets ein Vierek *A* bilden.

3) Der fünfte Punct liegt innerhalb beider Parabeln, aber aufserhalb des Vierecks.

4) Der fünfte Punct liegt aufserhalb beider Parabeln, aber nicht in den Räumen der Scheitelwinkel des Vierecks.

In beiden Fällen ist durch diese fünf Puncte nur eine Hyperbel möglich. Man lege durch den fünften Punct eine Transversale und bestimme in derselben den conjugirten Punct dieses fünften Punctes, welcher in demselben Kegelschnitte liegt. Giebt man der Transversale durch jenen Punct beliebige Lagen, so sieht man, wie die Räume 3) und 4) miteinander correspondiren. Die Räume 4) erstrecken sich ins Unendliche; es wird also auch der conjugirte Punct des gegebenen fünften Punctes durch unendliche Puncte gehen, wenn die Transversale sich um den gegebenen Punct dreht. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

In den Fällen 1) und 2) liegen die Puncte der Hyperbel ebenfalls in beiden Räumen 1) und 2).

5) Der fünfte Punct liegt innerhalb der einen und aufserhalb der andern Parabel.

Läfst man eine Transversale um diesen fünften Punct sich drehen, so sieht man, dafs sein conjugirter Punct in den durch den Fall 5) gegebenen vier Räumen fortrückt. Alle diese conjugirten Puncte liegen aber nothwendig in endlicher Entfernung, da es in diesen Räumen nur zwei unendlich entfernte Puncte giebt, welche aber in den Parabeln selbst liegen.

27. Um ein Viereck B lassen sich Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln beschreiben. Alle Puncte der Ellipsen liegen innerhalb einer und außerhalb der andern Parabel. Alle Puncte der Hyperbeln liegen innerhalb oder aufserhalb beider Parabeln.

Aus den aufgestellten Sätzen folgt, dafs, wenn eine Transversale sich nach einer von zwei bestimmten Richtungen parallel fortbewegt und ein Viereck B schneidet, der Centralpunct der Involution in beiden Fällen eine Parabel beschreibt.

Es möge hier abgebrochen werden. Es ist leicht zu sehen, dafs noch eine grofse Reihe von Sätzen und Constructionen entwickelt werden könnten und dafs die Verwandtschaft der Collineation selbst noch einige neue Entwicklungen gestatten würde.

Die aufgestellten Sätze und Benennungen sind aus allgemein bekannten Werken entlehnt.

Breslau, den 19. August 1841.

10.

Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, e principiis Abelianis derivatae.

(Auctore *Ferd. Minding*, phil. Doctore.)

Caput I.

Evolutio formulae summatoriae generalis.

Forma integralium de quibus hic acturi sumus haec est: $\int F(x,y)\partial x$, in qua F designat functionem rationalem argumentorum x et y, quorum alterum y repraesentat radicem aliquam aequationis algebraicae

$$1.\quad p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

in qua p_0, p_1, p_2, ... p_n indicant functiones rationales integras argumenti x. Formulam summationi generali huiusmodi integralium inservientem secundum principia Abeliana exhibuit cl. *Jürgensen* in huius diarii tomo 19, pag. 113; verumtamen quo facilius intelligantur eae disquisitiones, quibus hae pagellae proprie dicatae sunt, noluimus hoc loco summationem illam omittere. Neque etiam, ut antea factum est, coëfficientem primum p_0 unitati aequalem supponere placuit; licet enim aequatio proposita adhibita substitutione $p_0 y = z$ in aliam transformetur, quae coëfficientem primum $= 1$ habeat, tamen transformata $z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 p_0 z^{n-2} + \dots + p_n p_0^{n-1} = 0$ propter coëfficientes divisibiles per diversas polynomii p_0 potestates characterem quendam particularem induit, quem in praesenti quaestione non sine pondere esse invenimus.

Ponatur aequatio priori similis sequens:

$$2.\quad q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + q_3 y^{n-3} + \dots + q_{n-1} y + q_n = 0,$$

in qua q_1, q_2, q_3, ... q_n iterum sint polynomia integra secundum x ordinata, quorum tamen coëfficientes tanquam indeterminati atque variabiles spectentur. Denotemus litteris y_1, y_2, ... y_n singulas radices aequationis (1.), quarum unaquavis y_λ ad libitum assumta, brevitatis causa ponatur

aggregatum

$$3.\quad q_1 y_\lambda^{n-1} + q_2 y_\lambda^{n-2} + q_3 y^{n-3} + \dots + q_{n-1} y_\lambda + q_n = \psi(x, y_\lambda)$$

sive brevius etiam $= \psi_\lambda$. Quibus ex aggregatis si formetur productum

$$4.\quad fx = p_0^{n-1}.\psi_1.\psi_2.\psi_3\dots\psi_n$$

constat fx esse functionem rationalem integram argumenti x, nec non formula

$$5.\quad fx = 0$$

exhiberi aequationem finalem genuinam quae ex eliminatione argumenti y inter aequationes (1. et 2.) prodire debet. (Qua de re, si placet, conferri potest articulus 6. tomi 22. huius diarii.) Gradum polynomii fx littera μ, radices aequationis (5.) litteris $x_1, x_2, x_3, \dots x_\mu$ designabimus.

Differentiando aequationem (5.) obtinemus

$$6.\quad f'x.\partial x + \delta fx = 0,$$

qua in formula $f'x$ repraesentat functionem derivatam secundum x, δ autem differentiale secundum coëfficientes variabiles polynomiorum $q_1, q_2, \dots q_n$. Erit igitur

$$7.\quad \delta fx = \frac{df}{dq_1}\delta q_1 + \frac{df}{dq_2}\delta q_2 + \dots + \frac{df}{dq_n}\delta q_n.$$

Praeterea aequatio (4.) suppeditat hanc:

$$\frac{1}{f}.\frac{df}{dq_k} = \frac{1}{\psi_1}.\frac{d\psi_1}{dq_k} + \frac{1}{\psi_2}.\frac{d\psi_2}{dq_k} + \dots + \frac{1}{\psi_n}.\frac{d\psi_n}{dq_k},$$

unde fit, adhibita formula (3.), quum sit $\frac{d\psi_\lambda}{dq_k} = y_\lambda^{n-k}$, et s. p.,

$$8.\quad \frac{df}{dq_k} = fx\left\{\frac{y_1^{n-k}}{\psi_1} + \frac{y_2^{n-k}}{\psi_2} + \dots + \frac{y_n^{n-k}}{\psi_n}\right\},$$

quae formula valet pro singulis valoribus 1, 2, 3, ... n indicis k. In formulis (7. et 8.) quantitas x prorsus est arbitraria; si vero sub specie x intelligimus radicem aliquam aequationis (5.), tunc unum certe aggregatorum $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ evanescit, quod si sit ψ_λ, obtinetur ex aequatione (8.)

$$9.\quad \frac{df}{dq_k} = \frac{fx}{\psi_\lambda}.y_\lambda^{n-k} \quad\text{sive}\quad y_\lambda^k\frac{df}{dq_k} = \frac{fx}{\psi_\lambda}.y_\lambda^n,$$

quae aequatio valet pro singulis k, puta $k=1$, $k=2$, ... $k=n$, unde fluit

$$\frac{df}{dq_1} = y_\lambda\frac{df}{dq_2} = y_\lambda^2\frac{df}{dq_3} = \dots = y_\lambda^{n-1}\frac{df}{dq_n}.$$

His e formulis petenda est determinatio eius radicis y quae ad radicem datam aequationis (5.) pertinet perque illam rationaliter exprimitur. Quam radicem y_λ radici x *associatam* brevitatis causa interdum nuncupare placet. Quibus positis ex aequationibus (7. et 9.) obtinemus

$$10.\quad \delta f x = \frac{fx}{\psi_\lambda}\{y_\lambda^{n-1}\delta q_1 + y_\lambda^{n-2}\delta q_2 + \dots + y_\lambda \delta q_{n-1} + \delta q_n\} = \frac{fx}{\psi_\lambda}\delta\psi_\lambda.$$

Designetur schemate $F(x, y_\lambda) = A_0 + A_1 p_0 y_\lambda + A_2 p_0^2 y_\lambda^2 + \dots + A_{n-1} p_0^{n-1} y_\lambda^{n-1}$ data functio rationalis integra argumentorum x et $p_0 y_\lambda$, cuius coëfficientes A_0, A_1, ... sint polynomia data integra secundum x; sit porro c quantitas constans; his positis statim patet, si x repraesentet radicem aequationis (5.), y_λ autem radicem aequationis (1.) huic x associatam, ex aequationibus (6. et 10.) obtineri hanc: $f'x.\partial x = -\frac{fx}{\psi_\lambda}.\delta\psi_\lambda$, qua factore $\frac{F(x, y_\lambda)}{f'x(c-x)}$ utrinque multiplicata evenit:

$$11.\quad \frac{-F(x, y_\lambda).\partial x}{c-x} = \frac{F(x, y_\lambda).fx}{c-x.f'x.\psi_\lambda}.\delta\psi_\lambda.$$

Iam vero si l designat unumquemque indicum 1, 2, 3, ... n a λ diversum, habetur $\frac{fx}{\psi_l} = 0$ ideoque etiam

$$12.\quad 0 = \frac{fx}{\psi_l}.\frac{F(x, y_l)}{c-x.f'x}.\delta\psi_l.$$

Unde per summationem colligitur

$$\frac{-F(x, y_\lambda)\partial x}{c-x} = \frac{fx}{c-x.f'x}\left\{\frac{F(x, y_1)\delta\psi_1}{\psi_1} + \frac{F(x, y_2)\delta\psi_2}{\psi_2} + \dots + \frac{F(x, y_n)\delta\psi_n}{\psi_n}\right\}$$

sive brevius

$$13.\quad \begin{cases} \dfrac{-F(x, y_\lambda)}{c-x}\partial x = \dfrac{\theta x}{c-x.f'x} \\ \text{siquidem} \\ \theta x = fx\left\{\dfrac{F(x, y_1)\delta\psi_1}{\psi_1} + \dfrac{F(x, y_2)\delta\psi_2}{\psi_2} + \dots + \dfrac{F(x, y_n)\delta\psi_n}{\psi_n}\right\}. \end{cases}$$

Antequam ulterius progrediamur, demonstrandum est functionem θx esse integram; quae demonstratio ita absolvitur. Constat functionem $\frac{fx}{\psi_1}\delta\psi_1 = p_0^{n-1}\psi_2\psi_3\dots\psi_n.\delta\psi_1$, quae est symmetrica respectu radicum $y_2, y_3, \dots y_n$, ordinari posse secundum potestates radicis y_1, facileque perspicitur hanc functionem, quam per T_1 paulisper designare placet, necessario hanc in for-

mam redigi posse:

$$T_1 = \frac{Q_0 + Q_1 p_0 y_1 + Q_2 p_0^2 y_1^2 + \dots + Q_{n-1} p_0^{n-1} y_1^{n-1}}{p_0^\lambda},$$

in qua $Q_0, Q_1, \dots Q_{n-1}$ sunt functiones integrae argumenti x, neque omnes simul per p_0 divisibiles. Manifesto enim functio T_1, si secundum potestates argumenti $p_0 y_1$ evolvitur, alium divisorem quam qui sit potestas polynomii p_0, contrahere non potest. His admissis dico functionem T_1 esse integram secundum x et $p_0 y_1$, sive esse $\lambda = 0$. Designemus enim summam $p_0^k(y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k)$ littera S_k, quae manifesto repraesentat functionem rationalem integram argumentorum $p_0, p_1, \dots p_n$. Quo pacto cum sit $\delta fx = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, siquidem T_2 designat eam functionem in quam transit T_1, si loco signi y_1 substituitur y_2, et sic de ceteris; obtinetur

$$\delta fx = \frac{Q_0 + Q_1 S_1 + Q_2 S_2 + \dots + Q_{n-1} S_{n-1}}{p_0^\lambda}.$$

Iam vero δfx est functio integra, ideoque in fractione proposita aut $\lambda = 0$ aut numerator per aliquam potestatem ipsius p_0 divisibilis. Sed polynomiorum $S_1, S_2, \dots S_{n-1}$ nullum per p_0 est divisible; praeterea unum saltem polynomiorum $Q_0, Q_1, \dots Q_{n-1}$ per p_0 non est divisibile; unde patet numeratorem continere unum saltem terminum per p_0 non divisibilem, ideoque ipsum per p_0 divisibilem non esse; est igitur $\lambda = 0$, atque

$$T_1 = Q_0 + Q_1 p_0 y_1 + Q_2 p_0^2 y_1^2 + \dots + Q_{n-1} p_0^{n-1} y_1^{n-1}.$$

Unde colligitur functionem $\theta x = F(x, y_1) . T_1 + F(x, y_2) . T_2 + \dots$ esse integram, ut diximus.

Aequatio (13.) valet pro singulis radicibus aequationis $fx = 0$, siquidem y_λ radicem aequationis (1.) illi x associatam repraesentat. Qua conditione recte observata indices distinguendae radici associatae inservientes, qualis est λ, brevitatis causa supprimere licebit. Quo pacto iam omnes μ aequationes quas pro $x = x_1, x = x_2, \dots x = x_\mu$ aequatio (13.) repraesentat, in summam colligendo obtinemus:

$$14. \quad -\Sigma \frac{F(x, y)\,\partial x}{c - x} = \Sigma \frac{\theta x}{c - x . f'x}.$$

Summatio aggregati $\Sigma \frac{\theta x}{c - x . f'x}$ secundum principia nota perficitur. Dividatur enim polynomium integrum θx per polynomium fx, atque sit $\theta x = Qx . fx + \Lambda x$, ideoque residuum divisionis Λx gradus inferioris quam fx;

iam erit, si x radicem aliquam aequationis $fx = 0$ repraesentat, $\theta x = \Lambda x$, ideoque $\Sigma \frac{\theta x}{c-x.f'x} = \Sigma \frac{\Lambda x}{c-x.f'x}$. Hanc autem summam constat esse $= \frac{\Lambda c}{fc}$, unde fit $\Sigma \frac{\theta x}{c-x.f'x} = \frac{\theta c - Qc.fc}{fc}$, quoniam $\Lambda c = \theta c - Qc.fc$. Invenimus igitur

$$\Sigma \frac{F(x,y).\partial x}{x-c} = \frac{\theta c}{fc} - Qc,$$

qua in formula Qc repraesentat partem integram functionis $\frac{\theta c}{fc}$. Haec pars commodius ita repraesentari potest: Si signo $[\Phi x]_{\left(\frac{1}{x}\right)}$ denotatur coëfficiens potestatis x^{-1} in evolutione functionis Φx secundum potestas descendentes argumenti x instituta, habetur

$$Qc = \left[\frac{\theta x}{x-c.fx}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Sit enim

$$\frac{\theta x}{fx} = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0 + \frac{A_{-1}}{x} + \frac{A_{-2}}{x^2} + \ldots,$$

ideoque pars integra $Qx = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0$. Multiplicando aequationem praecedentem serie

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \ldots + \frac{c^n}{x^{n+1}} + \ldots$$

obtinetur evolutio formae

$$\frac{\theta x}{(x-c)fx} = C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \ldots + C_0 + \frac{C_{-1}}{x} + \frac{C_{-2}}{x^2} + \ldots,$$

in qua manifesto $C_{-1} = A_n c^n + A_{n-1} c^{n-1} + \ldots + A_0 = Qc$, q. e. d. Est igitur

$$15. \quad \Sigma \frac{F(x,y).\partial x}{x-c} = \frac{\theta c}{fc} - \left[\frac{\theta x}{(x-c)fx}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Hac in aequatione substituantur $F_1 x.F(x,y)$ et $F_1 x.\theta x$ loco priorum $F(x,y)$ et θx, designante $F_1 x$ functionem integram, ita ut etiamnum θx sit functio rationalis integra argumenti x, quae eadem prorsus aequatione (13.) ut ante exhibetur, siquidem in hac formula $F(x,y)$ in significatione nunc demum introducta accipitur; quo pacto evenit e (15.)

$$16. \quad \Sigma \frac{F_1 x.F(x,y)}{x-c} \partial x = \frac{F_1 c.\theta c}{fc} - \left[\frac{F_1 x.\theta x}{x-c.fx}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ponamus primum $F_1 c = 0$, sive polynomium $F_1 x$ divisible binomio $x - c$, atque $F_1 x = (x - c).F_0 x$; manifesto fit:

$$\Sigma F_0 x . F(x, y) . \partial x = - \left[\frac{F_0 x . \theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Sit $\varphi x = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_r)$, atque $\varphi_0 x$ aliud polynomium integrum, ponamusque radices aequationis $\varphi x = 0$, puta $c_1, c_2, \dots c_r$ omnes inter se esse diversas; habetur secundum notas regulas

$$\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} = F_0 x + \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1 (x - c_1)} + \frac{\varphi_0 c_2}{\varphi' c_2 (x - c_2)} + \dots + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r (x - c_r)},$$

ubi $F_0 x$ partem integram fractionis propositae repraesentat; unde protinus colligitur

$$17. \quad \Sigma \frac{\varphi_0 x . F(x, y) . \partial x}{\varphi x}$$

$$= \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} . \frac{\theta c_1}{f c_1} + \frac{\varphi_0 c_2}{\varphi' c_2} . \frac{\theta c_2}{f c_2} + \dots + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r} . \frac{\theta c_r}{f c_r} - \left[\frac{\varphi_0 x . \theta x}{\varphi x . f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ad absolvendam integrationem observandum est esse

$$\frac{\theta c}{f c} = \frac{F(c, y_1) \partial \psi_1}{\psi_1} + \frac{F(c, y_2) \partial \psi_2}{\psi_2} + \dots + \frac{F(c, y_n) \partial \psi_n}{\psi_n},$$

siquidem c loco argumenti x in valore functionis θx substituitur, quo facto etiam $y_1, y_2, \dots y_n$ manifesto in functiones quantitatis c transeunt. Unde fit integratione peracta

$$\int \frac{\theta c}{f c} = F(c, y_1) \log \psi_1 + F(c, y_2) \log \psi_2 + \dots + F(c, y_n) \log \psi_n$$

Hinc denique evenit formula quaesita summatoria haec:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \int \frac{\varphi_0 x_i . F(x_i, y)}{\varphi x_i} \partial x_i = \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} \int \frac{\theta c_1}{f c_1} + \dots + \frac{\varphi_0 c_r}{f c_r} \int \frac{\theta c_r}{f c_r} - \left[\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} \int \frac{\theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

in qua x_i radicem aequationis $f x = 0$, y radicem aequationis (1.) priori associatam designat.

Forma $\frac{\varphi_0 x . F(x, y)}{\varphi x}$ censeri potest exprimere quamvis functionem rationalem argumentorum x et y; data enim quacunque huiusmodi functione constat radicem algebraicam y e denominatore semper tolli posse. Praeterea casus radicum aequalium aequationis $\varphi x = 0$ etiam in formula praecedenti contineri censendus est, quippe quae, si e. gr. $c_1 = c_2$, ambigua quidem nec tamen falsa evadat, regulisque notis ad speciem indeterminatam $\frac{0}{0}$ pertinentibus recte adhibitis facile ad valorem determinatum revocetur.

In casu particulari aequationis binorum terminorum $p_0 y^n + p_n = 0$, quem capite 3. seorsim considerabimus, non necessarium est, functionem $F(x, y)$ e terminis formae $A_k p_0^k y^k$ compositam concipere, sed sufficit abjecto factore p_0, terminos formae $A_k y^k$ considerare, in quibus A_k, ut ante, polynomium quodcunque datum integrum designat. Scilicet si ponatur $F(x, y) = A_k y^k$, ubi k e serie 1, 2, 3, ... $n-1$, fit e (13.)

$$\theta x = A_k \{T_1 . y_1^k + T_2 . y_2^k + \dots + T_n . y_n^k\},$$

ubi

$$T_1 = Q_0 + Q_1 p_0 y_1 + \dots + Q_{n-1} p_0^{n-1} y_1^{n-1}, \text{ et s. p.,}$$

ut supra. Iam perpendendo hoc in casu esse $p_0^h \{y_1^h + y_2^h + \dots + y_n^h\} = S_h = 0$, siquidem integer h per n non est divisibilis, statim obtinetur:

$$\theta x = A_k Q_{n-k} p_0^{n-k} \{y_1^n + y_2^n + \dots + y_n^n\} = n A_k Q_{n-k} p_0^{n-k-1} . p_n.$$

Cum vero k sit e serie 1, 2, ... $n-1$, ideoque $n-k-1$ non negativus, sequitur θx esse functionum integram per p_n divisibilem. Habemus igitur hoc in casu, loco formulae (17.), si ponamus $F(x, y) = y^k$,

$$18. \quad \Sigma \frac{\varphi_0 x . y^k}{\varphi x} \partial x = \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} . \frac{\theta c_1}{f c_1} + \dots + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r} . \frac{\theta c_r}{f c_r} - \left[\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} . \frac{\theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

ubi $\theta x = f x \left\{\frac{y_1^k \partial \psi_1}{\psi_1} + \dots + \frac{y_n^k \partial \psi_n}{\psi_n}\right\}$ est polynomium integrum per p_n divisible.

Caput II.

De numero minimo integralium ad quae numerus datus eiusmodi integralium reduci potest.

In praecedenti integratione radices aequationis (5.) ($fx = 0$) tanquam functiones coëfficientium variabilium in polynomiis q_1, q_2, ... q_n contentorum spectatae sunt. Vice versa etiam hi coëfficientes considerari possunt tanquam functiones totidem radicum datarum aequationis $fx = 0$. Sit m numerus omnium horum coëfficientium, excepto uno quem ex arbitrio (ex. gr. si placet = 1) accipere licet; deinde sint x_1, x_2, ... x_m m quantitates arbitrariae, tum coëfficientes polynomiorum q_1, q_2, ... q_n ita determinari possunt ut sit $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, ... $f(x_n) = 0$. Quem in finem sufficit hos coëfficientes determinare ex m aequationibus linearibus formae

19. $q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \dots + q_n = 0$ sive brevius $\psi(x, y) = 0$,
siquidem x repraesentat unamquamque quantitatum $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ atque y radicem aequationis (1.) illi x associatam, quam ceteroquin pro quavis quantitatum independentium $x_1, x_2, \dots x_m$ inter radices $y_1, y_2, \dots y_n$ ex arbitrio eligere seu tanquam datam considerare licet, pro reliquis autem radicibus aequationis $fx = 0$ non licet.

Coëfficientibus polynomiorum $q_1, q_2, \dots q_n$ dicto modo ope datarum m radicum determinatis, restant $\mu - m$ radices aequationis $fx = 0$, puta $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_\mu$, quae tanquam functiones priorum m radicum spectandae sunt. Hae $\mu - m$ radices continentur aequatione gradus $\mu - m$, puta hac:

$$20. \quad \frac{fx}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)} = 0.$$

Iam demonstrabimus gradum huius aequationis semper ad valorem fixum sive ab m omnino independentem revocari posse, quem infra assignabimus. Sed necessarium est antea quasdam notiones ad resolutionem aequationem litteralium pertinentes vel stabilire vel in memoriam revocare.

Ponamus singulas radices aequationis (1.) evolvi secundum potestates descendentes variabilis x; tunc exponens altissimae potestatis huius variabilis in sequentibus nobis dicetur ***gradus*** radicis ad quam evolutio pertinet.

Hi gradus, qui etiam fracti vel negativi esse possunt, facile inveniuntur. Repraesentante $k.x^\nu$ terminum altissimum evolutionis propositae radicis y, constat gradum ν huius radicis obtineri per comparationem graduum singulorum terminorum aequationis (1.), quos sequens tabula exhibet, in qua gradus polynomiorum $p_1, p_2, \dots$ signo haud inusitato δ repraesentantur:

$$A. \quad n\nu + \delta p_0,\ (n-1)\nu + \delta p_1,\ (n-2)\nu + \delta p_2,\ \dots,\ (n-l)\nu + \delta p_l,\ \dots,\ \nu + \delta p_{n-1},\ \delta p_n.$$

Valores quaesiti quantitatis ν ii erunt, pro quibus duo huius tabulae termini inter se aequales evadant atque reliquis omnibus non minores. Ut hos valores nanciscamur, formemus differentias inter terminum primum ac singulos reliquos terminos tabulae ($A.$), quae constituunt tabulam sequentem puta

$$B. \quad \delta p_0 + \nu - \delta p_1,\ \delta p_0 + 2\nu - \delta p_2,\ \dots,\ \delta p_0 + l\nu - \delta p_l,\ \dots,\ \delta p_0 + n\nu - \delta p_n.$$

Sit $\nu = \nu_1$ maximus numerus pro quo unus (vel fortasse plures simul) terminorum tabulae ($B.$) evanescant, ita ut sumto $\nu > \nu_1$ omnes termini tabulae ($B.$) sint positivi. Tunc pro $\nu = \nu_1$ termini non evanescentes omnes erunt positivi.

Pertineat terminus evanescens ad indicem $l = n_1$, ita ut sit $n_1 \nu_1 = \delta p_{n_1} - \delta p_0$; si vero plures termini simul evanescunt, considerandus est is qui *maximo* valori indicis l respondet, ita ut n_1 hunc maximum inter illos indices designet. Quibus positis patet esse (siquidem signo $>$ aequalitatem excludi, signo $\overline{\overline{>}}$ includi intelligitur)

$$n\nu_1 \overline{\overline{>}} (n-l)\nu_1 + \delta p_l - \delta p_0 \quad \text{pro} \quad l = 1, 2, 3, \ldots\, n_1 - 1;$$
$$n\nu_1 = (n-n_1)\nu_1 + \delta p_{n_1} - \delta p_0; \quad n\nu_1 > (n-l)\nu_1 + \delta p_l - \delta p_0 \text{ pro}$$
$$l = n_1 + 1,\ n_1 + 2, \ldots\, n.$$

Iam numerus ν_1 manifesto repraesentat gradum communem nonnullarum radicum aequationis (1.), quarum numerus est n_1. Ulteriorem harum radicum determinationem non moramur; observemus tantum esse $n_1 \nu_1 = \delta p_{n_1} - \delta p_0$; igitur $n_1 \nu_1$ est integer, etiam si ν_1 est fractus.

Numero ν inde a ν_1 ulterius decrescente, necessario pervenimus ad gradum ν_2 priore proxime minorem, ad quem pertineant n_2 radices, atque erit $n_2 \nu_2 = \delta p_{n_1+n_2} - \delta p_{n_1}$. Sic pergendo (nam ulteriori explicatione hoc loco supersederi posse censemus) omnes n radices in quasdam classes distribuemus, quarum prima continebit n_1 radices gradus ν_1, secunda n_2 radices gradus ν_2, ... ultima denique (h^{ta}) n_h radices gradus ν_h. Gradus $\nu_1, \nu_2, \ldots \ldots \nu_h$ inter se diversos supponimus et quidem secundum magnitudinem se excipientes ita ut sit $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 > \ldots > \nu_{h-1} > \nu_h$. Manifesto erit $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_h = n$, nec non $n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + \ldots + n_h \nu_h = \delta p_n - \delta p_0$. Numeri $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ omnes fracti esse possunt; sed producta $n_1 \nu_1, n_2 \nu_2, \ldots\, n_h \nu_h$ numeros integros semper constituunt.

In sequentibus h terminos tabulae (*A.*) ad indices $l = 0$, $l = n_1$, $l = n_1 + n_2, \ldots$ denique $l = n - n_h$ pertinentes a reliquis tabulae terminis distinguere juvabit. Hos igitur h terminos *principales*, reliquos *intermedios* vocabimus.

Exemplum. In hoc exemplo polynomium integrum gradus n denotabimus signo (x^n). Proposita sit aequatio

$$y^7 + (x^3)y^5 + (x^{11})y^4 + (x^2)y^3 + (x^8)y^2 + (x^{16})y + (x^{10}) = 0.$$

Tum tabula (*A.*) constat terminis sequentibus:

$$7\nu,\quad 5\nu+3,\quad 4\nu+11,\quad 3\nu+2,\quad 2\nu+8,\quad \nu+16,\quad 10.$$

Hinc fit $\nu_1 = \frac{11}{3}$, $n_1 = 3$; $\nu_2 = \frac{5}{3}$, $n_2 = 3$; $\nu_3 = -6$, $n_3 = 1$. Termini principales sunt 7ν, $4\nu + 11$, $\nu + 16$.

Denique observamus in sequentibus numerorum integrorum n_1 et $n_1 \nu_1$ divisorem integrum communem maximum positive acceptum designatum iri littera f_1; ac generaliter littera f_k divisorem communem integrum maximum positivum numerorum integrorum n_k et $n_k \nu_k$.

His praeparatis statim proponimus sequens *Theorema:*

Numerus $\mu - m$ variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_\mu$ quae e dato numero m variabilium independentium ope aequationis (20.) determinantur, semper reduci potest ad valorem sequentem a dato numero arbitrario m omnino independentem eumque minimum, quem per τ designare placet; puta

$$21. \quad \mu - m = \tau$$

$$= (n-1) n_1 \nu_1 - \frac{(n_1-1)(n_1 \nu_1 - 1) + f_1 - 1}{2}$$

$$+ (n - n_1 - 1) n_2 \nu_2 - \frac{(n_2-1)(n_2 \nu_2 - 1) + f_2 - 1}{2} + \ldots$$

$$+ (n - n_1 - n_2 \ldots - n_{k-1} - 1) n_k \nu_k - \frac{(n_k-1)(n_k \nu_k - 1) + f_k - 1}{2} + \ldots$$

$$+ (n_h - 1) n_h \nu_h - \frac{(n_h-1)(n_h \nu_h - 1) + f_h - 1}{2} + (n-1)(\delta p_0 - 1).$$

Demonstratio. Designando gradus polynomiorum $q_1, q_2, \ldots q_n$ litteris $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$, numerus coëfficientium variabilium in his polynomiis contentorum est $\delta q_1 + \delta q_2 + \delta q_3 + \ldots + \delta q_n + n - 1 = m$. Quaeruntur relationes quae inter singulos gradus $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ intercedere debent ut differentia $\mu - m$ fiat quam minima. Quem in finem consideremus unum quodcunque aggregatorum $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, puta hoc

$$\psi_\lambda = q_1 y_\lambda^{n-1} + q_2 y_\lambda^{n-2} + \ldots + q_n.$$

Gradum radicis y_λ designabimus simpliciter littera ν; gradum aggregati ψ_λ signo $\delta \psi_\lambda$ repraesentabimus. Sit k aliquis e numeris 1, 2, 3, ... n; tunc erit $\delta q_k + (n-k)\nu$ gradus termini $q_k . y_\lambda^{n-k}$, ac manifesto

$$22. \quad \delta \psi_\lambda \geqq \delta q_k + (n-k)\nu.$$

Distribuamus aggregata $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, e quibus productum fx conflatum est, in h classes secundum gradus radicum ad singula aggregata pertinentium. Manifesto omnia aggregata in eadem classe contenta, i. e. ad radices aequalis gradus pertinentia, aequalis erunt gradus; nam quum coëfficientes polynomiorum $q_1, q_2, \ldots q_n$ omnes tanquam indeterminati spectandi sint, termini altissimi, si in eodem aggregato plures fortasse (puta aequalis inter se gradus reliquisque terminis omnibus maioris) adsunt, se invicem

destruere nequeunt. Primam classem formabunt aggregata $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, ad radices $y_1, y_2, \ldots y_n$ pertinentia quae omnes sunt gradus ν_1; gradum communem horum aggregatorum signo $\delta\psi(\nu_1)$ denotabimus. Similiter $\delta\psi(\nu_2)$ erit gradus communis n_2 aggregatorum $\psi_{n_1+1}, \psi_{n_1+2}, \ldots \psi_{n_1+n_2}$ ad radices $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots y_{n_1+n_2}$ gradus ν_2 pertinentium; et s. p. Hinc fit gradus producti fx, puta μ,

$$23. \quad \mu = (n-1)\delta p_0 + n_1\delta\psi(\nu_1) + n_2\delta\psi(\nu_2) + \ldots + n_h\delta\psi(\nu_h).$$

Sit ϱ unus ex indicibus 1, 2, 3, ... h; habetur secundum (22.) $\delta\psi(\nu_\varrho) \overline{\overline{>}} \delta q_k + (n-k)\nu_\varrho$, siquidem k est unus quicunque e numeris 1, 2, 3, ... n. Itaque si sumatur $k = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{\varrho-1} + 1$, erit

$$\delta\psi(\nu_\varrho) \overline{\overline{>}} \delta q_{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{\varrho-1}+1} + (n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{\varrho-1} - 1)\nu_\varrho.$$

Hac in formula ponatur deinceps $\varrho = 1$, $\varrho = 2$, ... $\varrho = h$; unde fit

$$\delta\psi\nu_1 \overline{\overline{>}} \delta q_1 + (n-1)\nu_1, \quad \delta\psi\nu_2 \overline{\overline{>}} \delta q_{n_1+1} + (n - n_1 - 1)\nu_2, \quad \ldots\ldots$$
$$\delta\psi\nu \overline{\overline{>}} \delta q_{n-n_h+1} + (n_h - 1)\nu_h.$$

Harum formularum primam ab utraque parte multiplicemus factore n_1, secundam factore n_2, ... atque ponamus brevitatis causa:

$$24. \quad E = (n-1)\delta p_0 + n_1\delta q_1 + (n-1)n_1\nu_1 + n_2\delta q_{n_1+1} + (n-n_1-1)n_2\nu_2 + \ldots$$
$$\ldots + n_\varrho\delta q_{n_1+n_2+\ldots+n_{\varrho-1}+1} + (n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{\varrho-1} - 1)n_\varrho\nu_\varrho + \ldots$$
$$\ldots + n_h\delta q_{n-n_h+1} + (n_h - 1)n_h\nu_h.$$

Quo facto statim, comparando aequationem (23.), colligimus:

$$\mu \overline{\overline{>}} E.$$

Igitur numerus E exprimit limitem gradu μ certe non superiorem; sed demonstrari potest, μ semper re vera usque ad hunc limitem deprimi posse. Quem in finem sequentes valores proponimus:

$$25. \quad \delta q_{n_1+1} = \delta q_1 + n_1\nu_1, \quad \delta q_{n_1+n_2+1} = \delta q_{n_1+1} + n_2\nu_2 = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2,$$
$$\delta q_{n_1+n_2+n_3+1} = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3, \quad \text{e. s. p., denique}$$
$$\delta q_{n-n_h+1} = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \ldots + n_h\nu_h.$$

Haec determinatio solos spectat terminos $q_1, q_{n_1+1}, q_{n_1+n_2+1}, q_{n_1+n_2+n_3+1}, \ldots$ $\ldots q_{n-n_h+1}$ quos terminos *principales* aggregati $\psi = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n$ nuncupabimus, quorumque electio manifesto pendet e terminis quos supra diximus principalibus tabulae (A.). Reliquorum (intermediorum) terminorum aggregati ψ determinationem in posterum differimus.

Ad demonstrandam propositionem in formulis (25.) contentam, consideremus aggregatum e solis terminis principalibus aggregati $\psi(\nu_\varrho)$ conflatum, puta:

$$\Phi(\nu_\varrho) = q_1 y^{n-1} + q_{n_1+1} y^{n-n_1-1} + q_{n_1+n_2+1} y^{n-n_1-n_2-1} + \dots + q_{n-n_h+1} y^{n_h-1}.$$

Iam dico gradum $\delta\Phi(\nu_\varrho)$ huius aggregati e formulis (25.) fieri:

$$\text{26.} \quad \delta\Phi(\nu_\varrho) = \delta q_{n_1+n_2+\dots+n_{\varrho-1}+1}(n-n_1-n_2-\dots-n_{\varrho-1}-1)\nu_\varrho$$
$$= \delta q_1 + n_1\nu_1 + \dots + n_{\varrho-1}\nu_{\varrho-1} + (n-n_1-n_2-\dots-n_{\varrho-1}-1)\nu_\varrho = g'.$$

Nam generaliter terminus $(k+1)^{\text{tus}}$ aggregati $\Phi(\nu_\varrho)$ est $q_{u_k+1}\cdot y^{n-u_k-1}$ ubi compendii causa introduximus signum:

$$u_k = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k;$$

unde erit gradus huius termini quem littera g denotabimus, quum gradus radicis g sit ν_ϱ, sive $\delta y = \nu_\varrho$,

$$g = \delta q_{u_k+1} + (n-u_k-1)\nu_\varrho = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \dots + n_k\nu_k + (n-u_k-1)\nu_\varrho.$$

Demonstrandum est hunc valorem ipsius g valore ipsius g', quem formula (26.) exhibet, non superiorem esse, sive esse pro quovis valore ipsius k e serie 1, 2, 3, ... h,

$$g \gtrless g'.$$

Quod ita probatur:

***Primum* patet si $k+1=\varrho$, esse $g=g'$. *Deinde* si est $k<\varrho-1$, habemus**

$$g'-g = n_{k+1}\nu_{k+1} + n_{k+2}\nu_{k+2} + \dots + n_{\varrho-1}\nu_{\varrho-1} - (n_{k+1}+n_{k+2}+\dots+n_{\varrho-1})\nu_\varrho$$

sive

$$g'-g = n_{k+1}(\nu_{k+1}-\nu_\varrho) + n_{k+2}(\nu_{k+2}-\nu_\varrho) + \dots + n_{\varrho-1}(\nu_{\varrho-1}-\nu_\varrho);$$

qui valor manifesto est positivus, quum $n_{k+1}, n_{k+2}, \dots n_\varrho$ omnes sint integri positivi, nec non differentiae $\nu_{k+1}-\nu_\varrho, \dots \nu_{\varrho-1}-\nu_\varrho$ omnes sint positivae, quia $k+1<\varrho$, ideoque $\nu_{k+1} > \nu_{k+2} > \dots > \nu_\varrho$.

***Postremo* si $k>\varrho-1$, fit**

$$g'-g = (n_\varrho + n_{\varrho+1} + \dots + n_k)\nu_\varrho - n_\varrho\nu_\varrho - n_{\varrho+1}\nu_{\varrho+1} - \dots - n_k\nu_k \quad \text{sive}$$
$$g'-g = n_{\varrho+1}(\nu_\varrho - \nu_{\varrho+1}) + n_{\varrho+2}(\nu_\varrho - \nu_{\varrho+2}) + \dots + n_k(\nu_\varrho - \nu_k),$$

igitur iterum $g'-g>0$; q. e. d.

Hinc colligitur, valore g' (form. 26.) exhiberi gradum quem aggregatum $\Phi(\nu_\varrho)$ e suppositione formularum (25.) nanciscitur.

Comparando valorem inventum gradus aggregati $\Phi(\nu_\varrho)$ formulae (24.) obtinemus:

$$E = (n-1)\delta p_0 + n_1\delta\Phi\nu_1 + n_2\delta\Phi\nu_2 + \dots + n_h\delta\Phi\nu_h.$$

Est autem

$$\delta f x = \mu = (n-1)\delta p_0 + n_1 \delta\psi v_1 + n_2 \delta\psi v_2 + \dots + n_k \delta\psi v_k;$$

insuperque patet esse

$$\delta\psi v_\varrho \overline{\overline{>}} \delta\Phi v_\varrho.$$

Iam ut revera, uti diximus, gradus μ usque ad limitem E deprimatur, manifesto excludenda est hypothesis:

$$\delta\psi v_\varrho > \delta\Phi v_\varrho;$$

sive efficiendum est

$$27. \quad \delta\psi v_\varrho = \delta\Phi v_\varrho.$$

Igitur gradibus terminorum intermediorum aggregati $\psi(v_\varrho)$, quos hucusque indeterminatos reliquimus, tribuendi sunt valores maximi qui salva conditione (27.) admitti possint. Itaque debet esse (cf. form. 26.)

$$\delta\psi v_\varrho = \delta\Phi v_\varrho = \delta q_{u_{\varrho-1}+1} + (n - u_{\varrho-1} - 1) v_\varrho$$

(ubi ut supra $n_1 + n_2 + \dots + n_{\varrho-1} = u_{\varrho-1}$).

Consideremus primum terminos aggregati ψ_ϱ hoc in schemate contentos: $q_{k_{\varrho-1}+l} \cdot y^{n-u_{\varrho-1}-l}$, siquidem numero l omnes valores 1, 2, 3, ... n_ϱ deinceps tribuuntur. Cum sit $\delta y = v_\varrho$, gradus horum terminorum exprimuntur formula:

$$\delta q_{u_{\varrho-1}+l} + (n - u_{\varrho-1} - l) v_\varrho;$$

unde obtinemus conditionem primam, quae requiritur ut fiat $\delta\psi v_\varrho = \delta\Phi v_\varrho$; puta hanc:

$$\delta q_{u_{\varrho-1}+l} + (n - u_{\varrho-1} - l) v_\varrho \overline{\overline{<}} \delta q_{u_{\varrho-1}+1} + (n - u_{\varrho-1} - 1) v_\varrho$$

sive

$$28. \quad \delta q_{u_{\varrho-1}+l} \overline{\overline{<}} \delta q_{u_{\varrho-1}+1} + (l-1) v_\varrho \quad \text{pro} \quad l = 1, 2, 3, \dots n_\varrho.$$

Denotemus signo $|t|$ numerum integrum (positivum vel negativum) data quantitate t proxime minorem, sive ipsum t si t est integer, ita ut sit $t - 1 < |t| \overline{\overline{<}} t$; ex. gr. $|-\frac{7}{3}| = -3$. His positis conditioni primae (28.) manifesto satisfacimus ponendo

$$29. \quad \delta q_{u_{\varrho-1}+l} = \delta q_{u_{\varrho-1}+1} + |(l-1) v_\varrho|, \quad (\text{pro } l = 1, 2, 3, \dots n_\varrho).$$

Sed haec conditio terminos tantum inter $q_{u_{\varrho-1}+1}$ et $q_{u_\varrho+1}$ intermedios aggregati $\psi(v_\varrho)$ amplectitur; igitur restat ut etiam reliqui termini aggregati ψv_ϱ in considerationem vocentur. Ac primum quidem observandum est, formulis (25. et 29.) gradus omnium polynomiorum $q_1, q_2, q_3, \dots q_n$, sive ad terminos principales sive ad intermedios pertineant, complete determinari (gradu δq_1 manifesto indeterminato manente), siquidem in formula (29.) in-

dici ϱ omnes valores e serie 1, 2, 3, ... h deinceps tribuuntur. Ita fit posito $\varrho = 1$ e (29.)

$$\delta q_l = \delta q_1 + |(l-1)\nu_1| \quad \text{pro} \quad l = 1, 2, 3, \ldots. n_1;$$

sive

$$\delta q_2 = \delta q_1 + |\nu_1|, \quad \delta q_3 = \delta q_1 + |2\nu_1|, \quad \ldots. \quad \text{e. s. p.}$$

Manifesto gradus δq_1 satis elevatus eligi semper potest ac debet, ut reliquorum terminorum $q_2, q_3, \ldots. q_n$ gradus omnes positivi vel etiam $=0$, evadant, quoniam negativi esse non possunt.

Igitur ut demonstratio nostra absolvatur, probandum est, valores formulae (29.) (qui certe sunt pro singulis ϱ maximi admissibiles ut jam ostensum est) conditioni (27.) revera satisfacere.

Consideremus unum quodcunque aggregatorum ψ, puta $\psi(\nu_k)$, designante k numerum quemlibet e serie 1, 2, 3, ... h. Huius aggregati terminus generalis est

$$q_{u_{\varrho-1}+l} \cdot y^{n-u_{\varrho-1}-l} \quad \text{ubi} \quad u_{\varrho-1} = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots. + n_{\varrho-1},$$

ut ante, ϱ autem est e serie 1, 2, 3, ... h; l e serie 1, 2, 3, ... n_ϱ; denique $\delta y = \nu_k$. Igitur gradus huius termini est

$$g = \delta q_{u_{\varrho-1}+l} + (n - u_{\varrho-1} - 1)\nu_k$$

sive secundum formulas (25. et 29.)

$$g = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \ldots. + n_{\varrho-1}\nu_{\varrho-1} + |(l-1)\nu_\varrho| + (n - u_{\varrho-1} - l)\nu_k.$$

Est vero

$$\delta\varphi\nu_k = g' = \delta q_1 + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \ldots. + n_{k-1}\nu_{k-1} + (n - u_{k-1} - 1)\nu_k \text{ (cf. form. 26.).}$$

Quibus valoribus inter se comparatis, facile colligitur esse $g' - g \overset{=}{>} 0$.

Primum si $\varrho = k$, fit $g' - g = (l-1)\nu_k - |(l-1)\nu_k|$ manifesto $\overset{=}{>} 0$.

Secundo loco sit $\varrho < k$; tunc fit

$$g' - g = n_\varrho\nu_\varrho + n_{\varrho+1}\nu_{\varrho+1} + \ldots. + n_{k-1}\nu_{k-1} - (n_\varrho + n_{\varrho+1} + \ldots. + n_{k-1})\nu_k$$
$$+ (l-1)\nu_k - |(l-1)\nu_\varrho|,$$

vel quoniam $(l-1)\nu_\varrho \overset{=}{>} |(l-1)\nu_\varrho|$, fit

$$g' - g \overset{=}{>} n_\varrho(\nu_\varrho - \nu_k) + n_{\varrho+1}(\nu_{\varrho+1} - \nu_k) + \ldots. + n_{k-1}(\nu_{k-1} - \nu_k) + (l-1)(\nu_k - \nu_\varrho)$$

sive

$$g' - g \overset{=}{>} (n_\varrho - l + 1)(\nu_\varrho - \nu_k) + n_{\varrho+1}(\nu_{\varrho+1} - \nu_k) + \ldots. + n_{k-1}(\nu_{k-1} - \nu_k).$$

Est autem $n_\varrho - l \overset{=}{>} 0$, ideoque $n_\varrho - l + 1 > 0$; $\nu_\varrho - \nu_k > 0$ quia $\varrho < k$, omnesque reliqui termini manifesto sunt positivi; unde $g' - g > 0$.

Tertio loco si $\varrho > k$, fit

$$g'-g = (n_k+n_{k+1}+\dots+n_{\varrho-1})\nu_k-(n_k\nu_k+n_{k+1}\nu_{k+1}+\dots+n_{\varrho-1}\nu_{\varrho-1})$$
$$+(l-1)\nu_k-|(l-1)\nu_\varrho|;$$

sive quoniam $(l-1)\nu_\varrho \overline{\overline{>}} |(l-1)\nu_\varrho|$,

$$g'-g \overline{\overline{>}} n_{k+1}(\nu_k-\nu_{k+1})+\dots+n_{\varrho-1}(\nu_k-\nu_{\varrho-1})+(l-1)(\nu_k-\nu_\varrho),$$

quae summa omnes terminos positivos habet atque manifesto perducit ad conclusionem $g'-g>0$.

Hinc colligitur gradus terminorum intermediorum, quos formula (29.) sistit, re vera admissibiles esse, atque omnino formulis (25. et 29.) polynomiorum $q_2, q_3, q_4, \dots q_n$ gradus (gradu polynomii q_1 arbitrario manente) ita determinari, ut simul gradus μ aequationis $fx=0$ ad limitem E deprimatur, quem formula (24.) exprimit, numerusque m coëfficientium in his polynomiis contentorum quam fieri potest maximus evadat, ita ut denique differentia $\mu-m$ valorem minimum nanciscatur. Sed hunc valorem differentiae $\mu-m$ multo concinnius repraesentare possumus, quam immediata singulorum terminorum agglomeratione fieret.

Est enim
$$m = \delta q_1+\delta q_2+\dots+\delta q_n+n-1,$$
nec non secundum praecedentia $\delta q_2=\delta q_1+|\nu_1|$, $\delta q_3=\delta q_1+|2\nu_1|$, …. $\delta q_{n_1}=\delta q_1+|n_1-1.\nu_1|$, $\delta q_{n_1+1}=\delta q_1+n_1\nu_1$, $\delta q_{n_1+2}=\delta q_{n_1+1}+|\nu_2|$, et s. p., unde

$$m=n_1\delta q_1+\sum_{l=1}^{l=n_1-1}|l\nu_1|+n_2\delta q_{n_1+1}+\sum_{l=1}^{l=n_2-1}|l\nu_2|+n_3\delta q_{n_1+n_2+1}+\sum_{l=1}^{l=n_3-1}|l\nu_3|+\dots$$
$$\dots+n_h\delta q_{n-n_h+1}+\sum_{l=1}^{l=n_h-1}|l\nu_h|+n-1.$$

Combinando hunc valorem cum valore ipsius μ quem supra $=E$ (cf. form. 24.) invenimus, obtinemus valorem quaesitum

30. $$\mu-m=\tau=(n-1)n_1\nu_1-\sum_{l=1}^{l=n_1-1}|l\nu_1|+(n-n_1-1)n_2\nu_2-\sum_{l=1}^{l=n_2-1}|l\nu_2|+\dots$$
$$\dots+(n_h-1)n_h\nu_h+\sum_{l=1}^{l=n_h-1}|l\nu_h|+(n-1)(\delta p_0-1).$$

Summationes in praecedenti aequatione indicatae facile absolvuntur. Ponamus enim $l.\nu_1=|l.\nu_1|+r$, erit $r=0$ si $l\nu_1$ est integer, si vero numerus $l\nu_1$ fractus est, erit r fractio positiva unitate minor, ut e definitione signi $|l\nu_1|$ sponte patet. Hinc prodit $(n_1-l)\nu_1 = n_1\nu_1-|l\nu_1|-r = n_1\nu_1-|l\nu_1|-1+1-r$, ideoque, quia $n_1\nu_1$ est integer: $|(n_1-l)\nu_1| = n_1\nu_1-|l\nu_1|-1$ si r non est $=0$; si vero $r=0$, $|(n_1-l)\nu_1|=(n_1-l)\nu_1$.

Hinc fit $|l\nu_1|+|(n_1-l)\nu_1| = n_1\nu_1-1$ si $l\nu_1$ est numerus fractus,
$|l\nu_1|+|(n_1-l)\nu_1| = n_1\nu_1$ si $l\nu_1$ est integer.

Denotando, ut iam supra diximus, littera f_1 divisorem communem maximum positivum numerorum integrorum n_1 et $n_1\nu_1$, facile intelligitur in serie numerorum $\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots (n_1-1)\nu_1$ inveniri sequentes integros, puta: $\frac{n_1\nu_1}{f_1}, \frac{2n_1\nu_1}{f_1}, \frac{3n_1\nu_1}{f_1}, \ldots \frac{(f_1-1)n_1\nu_1}{f_1}$ quorum numerus est f_1-1; reliquos autem terminos seriei $\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots (n_1-1)\nu_1$ integros esse non posse. Quibus perpensis ex aequationibus praecedentibus colligitur

$$\sum_{l=1}^{l=n_1-1}\{|l\nu_1|+|(n_1-l)\nu_1|\} = (n_1-1)n_1\nu_1-(n_1-1)+f_1-1$$
$$= (n_1-1)(n_1\nu_1-1)+f_1-1$$

sive

$$31. \quad 2.\sum_{l=1}^{l=n_1-1}|l\nu_1| = (n_1-1)(n_1\nu_1-1)+f_1-1.$$

Eodem modo fit

$$\sum_{l=1}^{l=n_2-1}|l\nu_2| = \frac{(n_2-1)(n_2\nu_2-1)+f_2-1}{2}; \text{ e. s. p.}$$

His valoribus in formula (30.) substitutis, evenit formula supra proposita (21.).

Ita demonstratum est theorema generalissimum de numero integralium formae $\int\frac{F(x,y)\partial x}{\varphi x}$, ad quem numerus datus arbitrarius eiusmodi integralium semper reduci potest. Hic numerus a sola natura eius aequationis algebraicae pendet, quae radicem y determinat.

Corollarium. Si omnes radices aequationis (1.) eodem gradu gaudent, quem per ν designabimus, fit $n_1 = n$, $\nu_1 = \nu$, $n\nu$ numerus integer $= \delta p_n - \delta p_0$, $f_1 = f =$ factori comm. max. pos. integro numerorum n et $n\nu$, $n_2 = 0$, $\nu_2 = 0$, ... $n_h = 0$, $\nu_h = 0$; unde obtinemus

$$\tau = (n-1)n\nu - \frac{(n-1)(n\nu-1)+f-1}{2}+(n-1)(\delta p_0-1)$$

sive

$$32. \quad \tau = (n-1)\delta p_0 + \frac{(n-1)(n\nu-1)-f+1}{2}.$$

Huic valori exacte respondet is, quem casu magis restricto aequationis $y^\lambda = R$, in quo $\delta p_0 = 0$, $n\nu = \delta R$, primus exhibuit cl. *Broch* in huius diarii vol. 20, p. 187.

Caput III.

Applicatio theorematum praecedentium ad aequationem inter binos terminos $p_0 y^n + p_n = 0$.

Haec aequatio nobis scribetur: $Py^n = R$, ubi P et R designant polynomia integra prorsus generaliter concipienda. Proficiscamur a formula in fine capitis primi exhibita (18.) puta hac:

$$33. \quad \Sigma \frac{\varphi_0 x}{\varphi x} . y^k \partial x = \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} . \frac{\theta c_1}{f c_1} + \ldots + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r} . \frac{\theta c_r}{f c_r} - \left[\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} . \frac{\theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

quae valet pro aequatione binorum terminorum ut l. c. ostendimus. Ibi etiam monstravimus polynomium integrum $\theta x = fx \left\{\frac{y_1^k \partial \psi_1}{\psi_1} + \ldots\right\}$ esse divisibile per R, sive esse $\theta x = \Lambda x . R$, siquidem Λx polynomium integrum significat. Hinc sequitur, si sumatur divisor $\Phi x = R$, quo pacto $c_1, c_2, c_3, \ldots \ldots c_r$ repraesentabunt radices aequationis $R = 0$, fieri necessario $\theta c_1 = 0$, $\theta c_2 = 0, \ldots . \theta c_r = 0$. Unde aequatio (33.) transit in hanc:

$$\Sigma \frac{\varphi_0 x}{R} . y^k \partial x = -\left[\frac{\varphi_0 x}{R} . \frac{\theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

sive etiam, quia $R = Py^n$:

$$34. \quad \Sigma \frac{\varphi_0 x}{P} . \frac{\partial x}{y^{n-k}} = -\left[\frac{\varphi_0 x}{R} . \frac{\theta x}{f x}\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Sint ϱ et π gradus polynomiorum R et P, unde gradus communis radicum y erit $= \frac{\varrho - \pi}{n}$; sit porro γ gradus polynomii $\Phi_0 x$. Generaliter gradus quotientis $\frac{\partial \psi_1}{\psi_1}$ est $= 0$, nec unquam hunc valorem superare potest, idemque valet de reliquis similibus; hinc fit gradus $\frac{\theta x}{fx} = \frac{y_1^k \partial \psi_1}{\psi_1} + \ldots + \frac{y_n^k \partial \psi_n}{\psi_n}$ hic: $\frac{k(\varrho - \pi)}{n}$; denique gradus fractionis in aequatione (34.) uncis inclusae obtinetur $= \gamma - \varrho + \frac{k(\varrho - \pi)}{n}$. Qui gradus si est < -1, erit:

$$35. \quad \Sigma \frac{\varphi_0 x}{P} . \frac{\partial x}{y^{n-k}} = 0.$$

Haec igitur aequatio subsistet, si $\gamma < \varrho - 1 - \frac{k(\varrho - \pi)}{n}$, qua e conditione maximus valor quem numerus γ admittit invenitur $\gamma' = \varrho - 2 - \left|\frac{k(\varrho - \pi)}{n}\right|$.

Aequatio $fx = 0$, cuius radices satisfaciunt aequationi differentiali (35.), a coëfficientibus polynomii $\Phi_0 x$ prorsus vacua est, ideoque, ut in huiusmodi casu primus animadvertit cl. *Jacobi* (tomo 9. pag. 394 huius diarii), satisfacit numero $\gamma+1$ aequationum differentialium simultanearum inter μ quantitates $x_1, x_2, \ldots . x_\mu$, puta sequentibus:

$$36.\quad \Sigma \frac{\partial x}{P.y^{n-k}} = 0,\ \Sigma \frac{x\partial x}{P.y^{n-k}} = 0,\ \Sigma \frac{x^2\partial x}{P.y^{n-k}} = 0,\ \ldots .\ \Sigma \frac{x^\gamma \partial x}{P.y^{n-k}} = 0,$$

ubi γ valorem maximum admissibilem repraesentat qui est $= \varrho - 2 - \left|\frac{k(\varrho-\pi)}{n}\right|$. Qui valor si negativus evadit, manifesto reiiciendus est, neque tunc aequatio ulla formae propositae subsistit; observandum tamen, numerum $\gamma = \varrho - 2 - \left|\frac{k(\varrho-\pi)}{n}\right|$ infra limitem -1 descendere non posse, sive numerum $\gamma+1$ aut positivum esse aut $= 0$, nunquam autem negativum. Hinc patet, numerum omnium aequationum differentialium simultanearum in schemate (36.) pro diversis valoribus $k = 1, 2, 3, \ldots . n-1$ contentarum esse

$$\Sigma(\gamma+1) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \left\{\varrho - 1 - \left|\frac{k(\varrho-\pi)}{n}\right|\right\}$$

$$= (n-1)(\varrho-1) - \frac{(n-1)(\varrho-\pi-1)+f-1}{2} = \tau',$$

ubi f est factor communis integer max. pos. numerorum n et $\varrho-\pi$. Invenimus igitur systema aequationum differentialium, quarum numerus est

$$\tau' = \frac{(n-1)(\varrho+\pi-1)-f+1}{2},$$

quo in systemate occurrunt μ quantitates variabiles, puta radices $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots x_\mu$ aequationis $fx = 0$, quarum igitur $\mu - \tau'$ tanquam independentes spectandae sunt, reliquae τ' autem his ipsis τ' aequationibus determinantur.

Altera ex parte datis $m = \mu - \tau$ radicibus aequationis $fx = 0$, reliquae τ radices prioribus complete determinantur. Quarum numerus e formula (32.), in qua $\delta p_0 = \pi$, $n\nu = \varrho - \pi$, invenitur

$$\tau = (n-1)\pi + \frac{(n-1)(\varrho-\pi-1)-f+1}{2} = \frac{(n-1)(\varrho+\pi-1)-f+1}{2}$$

sive est $\tau = \tau'$.

Hunc consensum attentione dignissimum primus animadvertit cl. *Abel* in casu $n = 2$; invenit enim numerum aequationum simultanearum formae (36.) esse $= \frac{\varrho+\pi-1}{2}$ vel $= \frac{\varrho+\pi}{2} - 1$, prout numerus $\varrho+\pi$ sit impar vel par;

eundem autem esse numerum minimum radicum aequationis $fx = 0$, quae reliquis e radicibus algebraice determinentur. Conferantur quae exstant in huius diarii tomo 3., pag. 321. et sequente.

Aequalitas valorum τ et τ' facile explicatur secundum ea quae cl. *Jacobi* l. l. pro casu $n = 2$ proposuit. Scilicet si inter $\mu = m + \tau$ radices $x_1, x_2, \ldots\, x_\mu$ hae $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\, x_{m+\tau}$, quarum numerus τ, tanquam constantes, reliquae $x_1, x_2, \ldots\, x_m$ tanquam variabiles considerantur, systema τ aequationum differentialium simultanearum inter m variabiles $x_1, x_2, \ldots\, x_m$, quarum numerus ad minimum $= \tau + 1$ accipiendus est, habet τ integralia completa, quae in aequatione gradus τ, puta $\frac{fz}{z - x_1 . z - x_2 \ldots . z - x_m} = 0$ continentur, cuius radices quantitatum constantium arbitrariarum vice funguntur.

Exempli causa consideremus aequationem $y^4 = R$, in qua R sit gradus 4, sive $\varrho = 4$; unde gradus radicis $y = 1$. Erit praeterea $\pi = 0$, $n = 4$, unde $f = 4$, $\tau = 3$; porro $\gamma + 1 = \varrho - 1 - \left|\frac{k(\varrho - \pi)}{n}\right| = 3 - \left|\frac{4k}{4}\right| = 3 - k$; unde fit $\gamma + 1 = 2, 1, 0$ pro $k = 1, 2, 3$. Quare proponimus secundum schema (36.) aequationes differentiales has inter m variabiles, in quibus y breviter radicem argumento x_i associatam designat:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial x_i}{y^3} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=m} \frac{x_i \partial x_i}{y^3} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial x_i}{y^2} = 0.$$

Scilicet suppositio $k = 1$ dat duas aequationes, suppositio $k = 2$ dat unam, $k = 3$ nullam. Huic aequationum differentialium systemati respondet aequatio finita haec

$$\frac{fx}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_m)} = 0$$

in qua secundum praecedentia, posito $\psi_1 = q_1 y_1^3 + q_2 y_1^2 + q_3 y_1 + q_4$, et s. p., habetur $fx = \psi_1 . \psi_2 . \psi_3 . \psi_4$. Gradus polynomii q_1 arbitrarius est $= \delta q_1$, reliqui autem sunt $\delta q_2 = \delta q_1 + 1$, $\delta q_3 = \delta q_1 + 2$, $\delta q_4 = \delta q_1 + 3$, unde gradus polynomii fx sive $\mu = 4\delta q_1 + 12$; numerus coëfficientium arbitrariorum in q_1, q_2, q_3, q_4 contentorum est $m = 4\delta q_1 + 9$; hinc aequationis propositae gradus fit $\mu - m = 3$, ut debet.

Similiter proposita aequatione $y^3 = R$, in qua R sit quarti gradus, obtinetur e schemate (36.) systema aequationum differentialium hoc (in quo, ut ante, y ubique radicem argumento x_i associatam designat), puta:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial x_i}{y} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial x_i}{y^2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i \partial x_i}{y^2} = 0,$$

cuius tria integralia completa algebraica continentur aequatione tertii gradus, quae secundum praecedentia facile evolvitur.

Ita ea ratio explicandi theorematis Abeliani, qua pro $n = 2$ usus est cl. *Jacobi*, ad quemvis valorem exponentis n extendi visa est, sive significatio theorematis *Abeliani* reduci ad exhibitionem aequationum algebraicarum, quae systemati totidem aequationum inter integralia proposita transcendentia, partem algebraico-logarithmicam nullam continentium ideoque in suo genere simplicissimarum, aequivaleant.

Berolini, m. Dec. a. 1841.

11.

Ueber einige stereometrische Sätze.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 14. Februar 1842 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)

Die nachstehenden Sätze haben die Berechnung solcher Körper zum Gegenstande, welche von zwei parallelen Grundflächen und von Seitenflächen die Dreiecke, Paralleltrapeze, windschiefe oder überhaupt geradlinige krumme Flächen sind, begrenzt werden. Hierbei ging mein Bestreben vornehmlich dahin, für die Berechnung möglichst bequeme Formeln zu finden und dieselben elementarisch und einfach zu beweisen.

§. I.

Fundamentalsatz.

„Ist die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide ABCDE ein Paralleltrapez ABCD, ist nämlich $AD \# BC$*, und wird die Pyramide durch eine Ebene EFG, welche durch ihre Spitze E und durch die Mitten F, G der nicht parallelen Seiten AB, CD der Grundfläche geht, geschnitten, so sind die aus den Ecken A, B, C, D auf diese Ebene gefällten Perpendikel gleich und der Inhalt der Pyramide ist gleich vier Drittel von dem Producte aus dem Durchschnitts-Dreieck EFG in eines der Perpendikel."* Und:

„Wenn eine der beiden parallelen Seiten der Grundfläche verschwindet, z. B. wenn $BC = 0$ *wird, und somit die Pyramide in eine dreiseitige übergeht, so bleibt auch für diese der Satz bestehen."*

Dieser Satz ist elementarisch und sehr leicht zu beweisen.

§. II.

Man denke sich nun ein solches Polyëder *K*, welches von zwei parallelen Vielecken *A*, *B*, als Grundflächen, und von Seitenflächen s, s_1, s_2, ... begrenzt wird, welche Paralleltrapeze, oder theils Dreiecke sind. Die Höhe des Körpers sei $H = 2h$. Die Durchschnitts-Figur, in welcher der Körper von der Ebene, die den Grundflächen parallel und in der Mitte

zwischen denselben liegt, geschnitten wird, heifse C. In dieser Ebene, z. B. innerhalb des Vielecks C, nehme man einen beliebigen Punct P an und betrachte ihn als gemeinschaftliche Spitze von Pyramiden, welche die verschiedenen Flächen des Körpers K zu Grundflächen haben, und welche also zusammen diesen Körper ausmachen. Die Pyramiden über den Seitenflächen s, s_1, s_2, ... sind alle von der Art, wie die im obigen Fundamentalsatze; jede wird von der genannten Ebene in einem Dreieck geschnitten (das dem obigen Dreiecke EFG entspricht) und alle diese Dreiecke bilden zusammen das Vieleck C, so dafs also die Summe der Pyramiden, infolge des Fundamentalsatzes, $= \frac{4}{3}hC$ ist. Die Inhalte der Pyramiden über den Grundflächen A und B sind $\frac{1}{3}hA$, $\frac{1}{3}hB$. Demnach hat man für den Inhalt des Körpers K folgenden Ausdruck

$$1. \quad K = \tfrac{1}{3}h(A+B+4C) = \tfrac{1}{6}H(A+B+4C).$$

Das heifst:

„Der Inhalt des Körpers K ist ein Sechstel von einem Prisma von gleicher Höhe H und über einer Grundfläche, welche so grofs ist, als die beiden Grundflächen A, B und die vierfache mittlere Durchschnitts-Figur C zusammengenommen."

§. III.

In jeder Seitenfläche s liegen drei entsprechende und parallele Seiten a, b, c der drei Vielecke A, B, C, und es ist immer $2c = a + b$; diese Gleichung findet auch in dem Falle statt, wo die Seitenfläche ein Dreieck und also entweder $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Daher ist auch, wenn man die Umfänge der Vielecke A, B, C durch (A), (B), (C) bezeichnet,

$$2. \quad 2(C) = (A) + (B),$$

das heifst:

„Der doppelte Umfang des mittlern Durchschnitts ist der Summe der Umfänge beider Grundflächen gleich."

§. IV.

Wird die Grundfläche B in ihrer Ebene um irgend einen festen Punct um 180° herumgedreht, so wird jede Seite b derselben wieder mit der nämlichen Seite a der festen Grundfläche A parallel, mit welcher sie zuvor parallel war; und werden sodann die nämlichen Ecken von A und B, wie anfänglich, durch Gerade (oder Kanten) verbunden, so entsteht ein

Körper K_1, dessen Seitenflächen σ, σ_1, σ_2, ... einander durchkreuzen, so dafs an die Stelle der früheren Paralleltrapeze, jetzt sogenannte *überschlagene* Paralleltrapeze treten, und dafs der Körper aus verschiedenen Theilen besteht, welche theils positiv, theils negativ zu nehmen sind*). Heifst für diesen Fall die mittlere Durchschnitts-Figur C_1 und ihre zu a und b gehörige Seite c_1, so ist jetzt $2c_1 = a - b$, wo also c_1 sowohl negativ als positiv sein kann; eben so der Inhalt der Figur C_1. Aufserdem hat man analogerweise, wie oben:

$$3. \quad K_1 = \tfrac{1}{6}H(A+B+4C_1),$$

$$4. \quad 2(C_1) = (A)-(B),$$

d. h.: „*Auch dieser Körper K_1 ist ein Sechstel von einem Prisma von gleicher Höhe und über einer Grundfläche, welche so grofs ist, als seine beiden Grundflächen und der vierfache mittlere Durchschnitt; und der Umfang dieses Durchschnitts ist der halben Differenz zwischen den Umfängen beider Grundflächen gleich.*"

§. V.

Da die Seiten (wie a, b, c, c_1) der Vielecke A, B, C, C_1 respective parallel sind, so haben diese beziehlich gleiche Winkel (einzelne Seiten der Grundflächen A, B sind Null, wofern unter den Seitenflächen der Körper K, K_1 sich Dreiecke befinden); und da ferner zwischen den entsprechenden Seiten die Gleichungen $2c = a+b$ und $2c_1 = a-b$ stattfinden, so folgt aus einer bekannten Formel — nach welcher der Inhalt eines n Ecks durch $n-1$ Seite und die von denselben gebildeten Winkel ausgedrückt wird — für die Inhalte der vier Vielecke nachstehende Gleichung:

$$5. \quad A+B = 2C+2C_1$$

d. h. *die Summe der Grundflächen ist doppelt so grofs, als die Summe der mittlern Durchschnitts-Figuren beider Körper.*

Dadurch verwandeln sich die obigen Ausdrücke (1. und 3.) für die Inhalte der beiden Körper K, K_1 in folgende:

---

*) Sind z. B. beide Grundflächen A, B Vierecke, so besteht der Körper im Allgemeinen aus drei Theilen, aus zwei schiefabgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden, die über den Grundflächen A, B liegen und sie zu Seitenflächen haben, und aus einer dazwischen liegenden, durch die vier Seitenflächen σ, σ_1, σ_2, σ_3 gebildeten dreiseitigen Pyramide, und dann sind jene beiden als positiv und diese letztere als negativ anzusehen.

$$6.\quad K = H(C + \tfrac{1}{3}C_1),$$
$$7.\quad K_1 = H(\tfrac{1}{3}C + C_1).$$

Das heifst:

„Jeder der beiden Körper ist gleich einem Prisma von gleicher Höhe und über einer Grundfläche, welche so grofs ist, als seine mittlere Durchschnitts-Figur und ein Drittel der mittleren Durchschnitts-Figur des andern Körpers."

Die Formel (6.) stimmt mit derjenigen überein, welche Herr *Koppe* in Bd. 18. S. 275 d. Journ. aufgestellt und mittelst der Integral-Rechnung bewiesen hat *).

§. VI.

Läfst man die Grundflächen A und B, durch Vermehrung ihrer Seitenzahl, in Curven übergehen, so gehen auch die mittlern Durchschnitte C, C_1 in Curven und die Seitenflächen der Körper gehen in bestimmte abwickelbare krumme Flächen S, S_1 über; nämlich jede dieser Flächen ist die Enveloppe einer Ebene, die auf beiden Curven A, B zugleich rollt. Da die bis dahin aufgestellten Formeln (1. bis 7.) für diesen Grenzfall offenbar gleicherweise gültig sind, so hat man folgende Sätze:

1°. *„Wenn ein Körper K oder K_1 von parallelen Grundflächen A und B, welche beliebige Curven sind, und von einer krummen abwickelbaren Seitenfläche S oder S_1 begrenzt wird, so ist der Umfang seines mittlern Durchschnitts C oder C_1 gerade halb so grofs, als die Summe oder die Differenz der Umfänge der beiden Grundflächen (2. oder 4.)."*

2°. *„Die Summe der Inhalte beider Grundflächen ist doppelt so grofs, als die Summe der Inhalte der mittlern Durchschnitte beider Körper (5.)."*

3°. *„Der Inhalt jedes der beiden in Betracht stehenden Körpers K, K_1 ist ein Sechstel des Products aus seiner Höhe in die Summe der beiden Grundflächen und des vierfachen mittlern Durchschnitts (1. oder 3.);*

---

*) Einen besondern Fall dieser Formel, wo nämlich der Körper K ein abgestumpfter Kegel ist, hat Herr Hofrath *Schweins* mir schon im Jahr 1835 mitgetheilt; er hatte denselben zur Bequemlichkeit für practische Rechnungen aufgestellt. Für diesen Fall hat man

$$K = H\left[\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2\right]\pi = H[(r+r_1)^2 + \tfrac{1}{3}(r-r_1)^2]\frac{\pi}{4},$$

wo r und r_1 die Radien der Grundflächen A und B sind.

oder gleich dem Producte aus der Höhe in die Summe seines mittlern Durchschnitts und eines Drittels des mittlern Durchschnitts des andern Körpers (6. oder 7.)."

§. VII.

Gehen die Körper K und K_1 insbesondere in abgestumpfte Pyramiden oder in abgestumpfte Kegel über, so werden die vier Figuren A, B, C, C_1 einander ähnlich, so dafs sich verhält:

$$8. \quad \sqrt{A}:\sqrt{B}:\sqrt{C}:\sqrt{C_1} = a:b:c:c_1 = a:b:\frac{a+b}{2}:\frac{a-b}{2},$$

wo a, b, c, c_1 entsprechende Seiten oder irgend welche homologe Dimensionen der Vielecke oder Curven A, B, C, C_1 sind. Dadurch modificiren sich die Ausdrücke (1. und 3. oder 6. und 7.) für die Inhalte der Körper wie folgt:

$$9. \quad K = \tfrac{1}{3}HA\left(1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = \tfrac{1}{3}HA(1+n+n^2) = \tfrac{1}{3}HA\frac{n^3-1}{n-1},$$

$$10. \quad K_1 = \tfrac{1}{3}HA\left(1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = \tfrac{1}{3}HA(1-n+n^2) = \tfrac{1}{3}HA\frac{1+n^3}{1+n},$$

wo $b:a = n$ gesetzt ist. Oder da nach (8. und 4.):

$$2\sqrt{C} = \sqrt{A}+\sqrt{B} \quad \text{und} \quad 2\sqrt{C_1} = \sqrt{A}-\sqrt{B},$$

und daher:

$$11. \quad 4C = A+B+2\sqrt{(AB)} \quad \text{und} \quad 4C_1 = A+B-2\sqrt{(AB)},$$

so gehen sie auch in folgende bekannte Ausdrücke über:

$$12. \quad K = \tfrac{1}{3}H(A+B+\sqrt{(AB)}); \quad K_1 = \tfrac{1}{3}H(A+B-\sqrt{(AB)}).$$

§. VIII.

Reduciren sich die Grundflächen auf zwei nicht parallele gerade Linien A und B, so dafs ihre Inhalte $= 0$ sind, so wird der Körper K (oder K_1) eine dreiseitige Pyramide; A und B sind gegenüber liegende Kanten und H ist ihr senkrechter Abstand von einander; der mittlere Durchschnitt C wird ein Parallelogramm, dessen Seiten den Kanten A, B parallel und bezieblich halb so grofs, als diese sind, so dafs also $C = \frac{1}{2}A.\frac{1}{2}B.\sin\varphi$, wo φ der Winkel ist, welchen A und B ihrer Richtung nach bilden. Demnach hat man in diesem Falle für den Inhalt des Körpers (1.):

$$13. \quad K = \tfrac{1}{6}H.4C = \tfrac{2}{3}HC = \tfrac{1}{6}HAB\sin\varphi,$$

d. h. *der Inhalt jeder dreiseitigen Pyramide ist zwei Drittel des Products*

aus dem Abstande H zweier gegenüber stehender Kanten A, B in den mit diesen Kanten parallelen mittlern Durchschnitt C; oder gleich einem Sechstel des Products aus den genannten zwei Kanten in ihren Abstand von einander und in den Sinus ihres Winkels.

§. IX.

Sind A und B, D und E, F und G gegenüberstehende Kanten einer dreiseitigen Pyramide, so wird diese von jeder den Kanten A und B parallelen Ebene in einem Parallelogramm $defg$ geschnitten, dessen Seiten beziehlich mit A, B parallel und dessen Ecken d, e, f, g in den Kanten D, E, F, G liegen. Bewegt sich die schneidende Ebene von A bis B, so beschreibt jede der beiden Diagonalen de, fg des Parallelogramms, z. B. de, ein sogenanntes *windschiefes* Viereck $ADBE$, d. i. ein Stück eines hyperbolischen Paraboloids; und da die Diagonale beständig das Parallelogramm hälftet, so wird folglich auch die Pyramide von dem windschiefen Vierecke in zwei gleich grofse Theile $k = k_1$ getheilt. Ein solcher Theil wird von drei Flächen begrenzt, nämlich von dem windschiefen Viereck $ADBE$ und von zwei (ebenen) Dreiecken, zwei Seitenflächen der Pyramide. Sein mittlerer Durchschnitt ist ein Dreieck γ, nämlich die eine Hälfte des Parallelogramms C, welches der mittlere Durchschnitt der Pyramide ist; demnach hat man für seinen Inhalt (13.):

$$14. \quad k = \tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}HC = \tfrac{2}{3}H\gamma,$$

d. h.: *Der Inhalt jedes der genannten Theile ist zwei Drittel von dem Producte aus der Höhe H in den mittlern Durchschnitt γ.*

Gleicherweise ergeben sich folgende Sätze:

Wird ein dreiseitiges Prisma von einer Ebene geschnitten, welche einer Seitenfläche desselben parallel ist, so ist der Schnitt ein Parallelogramm; bewegt sich die Ebene von der Seitenfläche bis zur gegenüber liegenden Kante, so beschreibt die Diagonale des Parallelogramms ein windschiefes Viereck, welches das Prisma in zwei gleich grofse Theile k, k_1 theilt. Der Inhalt jedes Theils ist $= \tfrac{2}{3}H\gamma$, d. h. gleich zwei Drittel des Products aus dem mittlern Durchschnitte γ in die Höhe H (Abstand der Seitenfläche von der gegenüber liegenden Kante). — Hier sind k, k_1 solche Körper, wovon jeder von einem windschiefen Viereck, einem Parallelogramm und zwei Dreiecken begrenzt wird.

Sind die Grundflächen A, B eines vierseitigen Prismas, dessen Seitenkanten, verlängert, nicht in einem Punct zusammentreffen und auch nicht parallel sind, Parallelogramme, so ist jeder mit ihnen parallele Schnitt gleichfalls ein Parallelogramm, dessen Diagonale, wenn sich die schneidende Ebene von A bis B bewegt, ein windschiefes Viereck beschreibt, durch welches das Prisma gehälftet wird, und wo wiederum jede Hälfte $k = k_1 = \frac{2}{3}H\gamma$, d. h. gleich zwei Drittel des Products aus der Höhe in den mittlern Durchschnitt ist. — U. s. w.

§. X.

Man denke einen Körper $\mathfrak{K}$, welcher zwei beliebige parallele Vielecke A, B zu Grundflächen hat, und dessen Seitenflächen s, s_1, s_2, ... windschiefe Vierecke, oder theils solche Vierecke und theils Paralleltrapeze und Dreiecke sind. Der mittlere Durchschnitt ist, wie früher (§. II.), ein geradliniges Vieleck $\mathfrak{C}$. Ueber jeder Seitenfläche s, die ein schiefes Viereck ist, setze man einen solchen Körper k, der die eine Hälfte einer dreiseitigen Pyramide ist, und zwar von derjenigen Pyramide, welche die in den Grundflächen A, B liegenden Seiten a, b des windschiefen Vierecks s zu gegenüber stehenden Kanten hat, also einen solchen Körper k, wie er zu Anfang des vorigen §. beschrieben worden. Alle diese Körper k mögen auf der äufsern Seite aufgesetzt werden. Dadurch entsteht ein Körper K, dessen Seitenflächen alle eben, Dreiecke und Paralleltrapeze, sind, und welcher mit dem vorigen $\mathfrak{K}$ die Grundflächen A, B gemein hat. Sein mittlerer Durchschnitt C besteht aus dem mittlern Durchschnitte $\mathfrak{C}$ des Körpers $\mathfrak{K}$ und aus einer Summe von Dreiecken γ, welche einzeln die mittlern Durchschnitte der aufgesetzten Körper k sind (§. IX.), so dafs also $C = \mathfrak{C} + \Sigma(\gamma)$, oder $\Sigma(\gamma) = C - \mathfrak{C}$. Eben so besteht der Körper K aus dem Körper $\mathfrak{K}$ und aus der Summe der Körper k. Daher hat man (1. und 14.):

$$15.\quad \begin{aligned} \mathfrak{K} &= K - \Sigma(k) = \tfrac{1}{6}H(A+B+4C) - \tfrac{2}{3}H.\Sigma(\gamma) \\ &= \tfrac{1}{6}H(A+B+4C) - \tfrac{2}{3}H(C-\mathfrak{C}) \\ &= \tfrac{1}{6}H(A+B+4\mathfrak{C}); \end{aligned}$$

d. h.: „*Auch bei dem Körper $\mathfrak{K}$, dessen Seitenflächen zum Theil oder alle windschiefe Vierecke sind, wird der Inhalt gleicherweise gefunden. nämlich er ist ein Sechstel des Products aus der Höhe in die Summe der Grundflächen und des vierfachen mittlern Durchschnitts.*

Dieser Satz gilt gleicherweise für denjenigen Körper $\mathfrak{K}_1$, welcher entsteht, wenn die Grundfläche B in ihrer Ebene um 180° herumgedreht wird, und bei welchem also die Seitenflächen einander durchkreuzen, wie oben §. IV. beim Polyëder K_1. Auch finden hier, analogerweise wie oben (5., 6. und 7.), die folgenden Gleichungen statt:

$$16. \quad A+B = 2\mathfrak{C}+2\mathfrak{C}_1;$$

$$17. \quad \mathfrak{K} = H(\mathfrak{C}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_1) \text{ und } \mathfrak{K}_1 = H(\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_1).$$

§. XI.

Läſst man die Grundflächen A und B, die als Vielecke vorausgesetzt worden, in Curven übergehen, so wird die Seitenfläche des Körpers $\mathfrak{K}$ irgend eine geradlinige krumme Fläche $\mathfrak{S}$, d. h. eine durch Bewegung einer Geraden erzeugte Fläche *(surface reglée)*; und dann geht auch der mittlere Durchschnitt $\mathfrak{C}$ in eine Curve über; die obige Formel (15.) bleibt aber offenbar auch für diesen Fall noch gültig. Demnach folgt der Satz:

„*Sind die Grundflächen A, B eines cylinderförmigen Körpers $\mathfrak{K}$ parallel und von beliebigen Curven umschlossen, und ist die Seitenfläche $\mathfrak{S}$ desselben irgend eine geradlinige krumme Fläche, so ist sein Inhalt ein Sechstel des Products aus der Höhe in die Summe der beiden Grundflächen und des vierfachen mittlern Durchschnitts.*"

Der Satz bleibt gleicherweise bestehen, wenn die Umfänge der Grundflächen nur zum Theil in Curven übergehen und die übrigen Theile gerade Linien bleiben, wobei dann entsprechenderweise die Seitenfläche $\mathfrak{S}$ aus verschiedenartigen Theilen bestehen kann, aus allgemeinen geradlinigen krummen Flächen und aus ebenen Flächen. Dadurch läſst sich also der Satz auf beliebige geradlinige krumme Flächen anwenden, d. h. ihre Cubatur läſst sich mittels desselben bewerkstelligen.

Einen einfachen besondern Fall des vorstehenden Satzes gewährt das einfache Hyperboloïd *(hyperboloïde à une nappe)*. Wird dasselbe z. B. von zwei parallelen Ebenen in Ellipsen A, B geschnitten, so wird der Inhalt des von den Grundflächen A, B und dem zwischen ihnen liegenden Theile $\mathfrak{S}$ des Hyerboloïds begrenzten Körpers $\mathfrak{K}$ auf die angegebene Weise gefunden. Nämlich es ist dann auch der mittlere Durchschnitt $\mathfrak{C}$ eine Ellipse, und wenn man die halben Axen der Ellipsen A, B, $\mathfrak{C}$ durch a und α, b und β, c und γ bezeichnet, so hat man

$$18. \quad \mathfrak{K} = \frac{\pi}{6}H(a\alpha+b\beta+4c\gamma).$$

Ein anderer interessanter besonderer Fall ist folgender.

Sind im Raume zwei unbegrenzte feste Gerade A, B gegeben, ist ihr senkrechter Abstand von einander $= H = 2h$, und soll eine gegebene Gerade $= 2a$ sich so bewegen, dafs ihre Endpuncte auf den festen Geraden A, B fortgleiten, so beschreibt sie eine geradlinige krumme Fläche, die einen Körper begrenzt, dessen Inhalt

$$19. \quad \mathfrak{K} = \tfrac{4}{3}h(a^2-h^2)\pi$$

ist. Dieses Resultat ist dadurch merkwürdig, dafs es von dem Winkel φ unabhängig ist, welchen die festen Geraden A, B ihrer Richtung nach mit einander bilden, d. h. das Volumen des Körpers bleibt constant, welche Gröfse dieser Winkel haben mag, wenn nur h und a sich nicht ändern. Nämlich der mittlere Durchschnitt $\mathfrak{C}$ ist hier eine Ellipse, deren Halb-Axen α und β — wenn $a^2-h^2 = b^2$ gesetzt wird — beziehlich $b.\cot\frac{1}{2}\varphi$ und $b.\tang\frac{1}{2}\varphi$ sind, so dafs also ihr Inhalt $= \alpha\beta\pi = b^2\pi = (a^2-h^2)\pi$ constant ist. Wenn insbesondere $\varphi = 90°$, so ist der mittlere Durchschnitt ein Kreis.

§. XII.

Viele von den im Vorstehenden betrachteten Körpern behandelt unter andern auch *M. Hirsch* in seiner „Sammlung *geometrischer Aufgaben*" (Th. II. §. 101—106; §. 155—157; §. 180—190). Er findet die Formeln für den Inhalt durch Hülfe der Trigonometrie und Projection. Die gegenwärtige Darstellung ist unstreitig einfacher, zusammenhängender und umfassender; auch sind die Formeln zum Theil bequemer. Vergleicht man seine *Formeln* mit den hier gegebenen, so ergeben sich z. B. folgende Relationen.

Für den im §. II. betrachteten Körper K findet *Hirsch* (S. 204, §. 156.) — wenn die Seiten der Grundflächen A und B durch a, a_1, a_2, ... und b, b_1, b_2, ... bezeichnet werden — die Formel:

$$20. \quad K = \tfrac{1}{3}H(H+B)+\tfrac{1}{6}H[ab_1\sin(aa_1)+ab_2\sin(aa_2)+ab_3\sin(aa_3)+\ldots+ab_{n-2}\sin(aa_{n-2})$$
$$+a_1b_2\sin(a_1a_2)+a_1b_3\sin(a_1a_3)+\ldots+a_1b_{n-2}\sin(a_1a_{n-2})$$
$$+a_2b_3\sin(a_2b_3)+a_2b_4\sin(a_2a_4)+\ldots+a_2b_{n-2}\sin(a_2a_{n-2})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{n-3}b_{n-2}\sin(a_{n-3}a_{n-2})]$$
$$= \tfrac{1}{3}H(A+B)+\tfrac{1}{6}H\Sigma[ab_1\sin(aa_1)].$$

Diese Formel mit der obigen (1.) verglichen, giebt:

$$21. \quad \Sigma[ab_1\sin(aa_1)] = 4C-A-B;$$

oder, da nach (5.) $A+B=2C+2C_1$, so folgt:

$$22. \quad \Sigma[ab_1 \sin(aa_1)] = 2C-2C_1,$$

und in der That sind die beiderseitigen Ausdrücke dieser Gleichung identisch, wenn man das, was oben (§. V.) von den Vielecken C und C_1 angegeben worden, berücksichtigt.

Für den in §. X. beschriebenen Körper $\mathfrak{K}$ giebt *Hirsch* (S. 252, §. 189.) die Formel:

$$23. \quad \mathfrak{K} = \tfrac{1}{2}H(A+B) - \tfrac{1}{12}H[ab\sin(ab) + bc\sin(be) + cd\sin(cd) + \ldots + ta\sin(ta)]$$
$$= \tfrac{1}{2}H(A+B) - \tfrac{1}{12}H\,\Sigma[ab\sin(ab)],$$

wo a, b, c, ... t die Projectionen der Seitenkanten des Körpers auf die Grundfläche A sind. Durch Vergleichung dieser Formel mit der obigen (15.) folgt:

$$24. \quad \Sigma[ab\sin(ab)] = 4(A+B-2\mathfrak{C}),$$

und vermöge (16.):

$$25. \quad \Sigma[ab\sin(ab)] = 8\mathfrak{C}_1.$$

Oder, da beide Formeln bestehen bleiben, wenn die windschiefen Seitenflächen in Paralleltrapeze, und damit der Körper $\mathfrak{K}$ in das Polyëder K übergeht, so hat man auch für diesen Fall:

$$26. \quad \Sigma[ab\sin(ab)] = 8C_1.$$

12.

Eine Aufgabe, betreffend die Theorie der cubischen Reste.

(Von Herrn Prof. Dr. *Kummer* zu Breslau.)

Wenn p eine Primzahl von der Form $3n+1$ ist, und g eine primitive Wurzel derselben, so kann die Reihe $1, g, g^2, g^3, \ldots g^{p-2}$ in drei verschiedene Reihen geordnet werden, nämlich $1, g^3, g^6, \ldots g^{p-4}$, ferner $g, g^4, g^7, \ldots g^{p-3}$ und $g^2, g^5, g^8, \ldots g^{p-2}$. Die Reste der ersten Reihe für den Modul p sind die cubischen Reste, von denen wir einen beliebigen mit α bezeichnen; die Reste der zweiten und dritten Reihe, welche wir resp. mit β und γ bezeichnen, sind die cubischen Nichtreste. Wenn nun α, β und γ die angegebene Bedeutung haben, so sind, wie *Gaufs* gezeigt hat, folgende drei Reihen:

$$x_1 = \sum_{0}^{p-1}{}_k \cos\frac{2\alpha k^3\pi}{p}, \quad x_2 = \sum_{0}^{p-1}{}_k \cos\frac{2\beta k^3\pi}{p}, \quad x_3 = \sum_{0}^{p-1}{}_k \cos\frac{2\gamma k^3\pi}{p}$$

die drei Wurzeln von folgender cubischen Gleichung:

$$x^3 = 2px + pt,$$

wo t durch die in ganzen Zahlen aufzulösende Gleichung $4p = t^2 + 27u^2$ und durch die Bedingung, dafs es positiv oder negativ zu nehmen sei, je nachdem es die Form $3h+1$ oder $3h-1$ hat, vollständig bestimmt ist. Die drei Reihen x_1, x_2, x_3 spielen in der Theorie der cubischen Reste eine sehr wichtige Rolle, sind aber durch diese cubische Gleichung noch nicht genau bestimmt, da es ganz unentschieden bleibt, welche der drei Wurzeln dieser Gleichung einer jeden dieser Reihen gleich ist; mit dieser Unbestimmtheit sind daher auch alle Resultate behaftet, welche man mit Hülfe dieser Reihen über cubische Reste gewinnt. Ich habe nun die Aufgabe, diese Unbestimmtheit aufzuheben, allerdings in einem gewissen Sinne gelöset, aber die Lösung genügt nicht recht, weil sie die Kenntnifs der Summe aller cubischen Reste, welche kleiner sind als $\frac{1}{2}p$, und eben so die Kenntnifs der Summen der beiden verschiedenen Arten von Nichtresten voraussetzt. Aus diesen berechneten Summen habe ich denn auch

die Werthe der drei Reihen z_1, z_2, z_3 für alle Primzahlen von der Form $3n+1$, unter 400, vollständig bestimmt und will die Resultate hier mittheilen, damit vielleicht ein Anderer durch Induction das allgemeine Gesetz finden könne, welches mir noch verborgen geblieben ist.

Zunächst bemerke ich, dafs, da t in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$ liegt, die drei Wurzeln der cubischen Gleichung stets in folgenden drei Intervallen enthalten sein müssen: die eine in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$, eine der andern in den Grenzen $-\sqrt{p}$ und $+\sqrt{p}$ und die dritte in den Grenzen $+\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$. Ferner bemerke ich, dafs, wenn eine der drei Reihen vollständig bestimmt ist, die Bestimmung der beiden anderen keine Schwierigkeiten weiter hat, da diese sich rational durch jene ausdrücken lassen; daher bestimme ich hier nur die Reihe $z_1 = \sum_{0}^{p-1} \cos\frac{2\alpha k^3 \pi}{p}$, in welcher auch $\alpha = 1$ genommen werden kann. Diese Reihe aber liegt nach meiner Berechnung

1) in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$ für die Primzahlen
97, 139, 151, 199, 211, 331;

2) in den Grenzen $-\sqrt{p}$ und $+\sqrt{p}$ für die Primzahlen
13, 19, 37, 61, 109, 157, 193, 241, 283, 367, 373, 379, 397;

3) in den Grenzen $+\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$ für die Primzahlen
7, 31, 43, 67, 73, 79, 103, 127, 163, 181, 223, 229, 271, 277, 307, 313, 337, 349.

Es käme nun darauf an, zu suchen, welche Eigenthümlichkeiten jede dieser drei Reihen habe, die keine Primzahl der beiden anderen Reihen theilte. Die lineäre Form der Primzahlen scheint hierbei keine Bedeutung zu haben, wohl aber die quadratische Form $4p = t^2 + 27u^2$; vielleicht auch die Form $p = r^2 + 3.s^2$. Da ich aber auch aus diesen kein Gesetz entdecken konnte, so nahm ich meine Zuflucht zu den Zahlen, welchen $\beta^{\frac{p-1}{3}}$ und $\gamma^{\frac{p-1}{3}}$ congruent sind, aber mit eben so wenig Erfolg; auch ob gewisse Zahlen, namentlich 2 und 3 cubische Reste sind, oder nicht, entschied hierbei nichts. Jedenfalls scheint das Gesetz etwas tief zu liegen, genauer Nachforschungen aber wohl werth zu sein.

Nachricht von der in Nr. 6. des vorigen Hefts dieses Journals gedachten Sammlung von Briefen an und von L. Euler.

Zufolge einer von dem Herrn Staatsrath *Fufs* in St. Petersburg dem Herausgeber dieses Journals kürzlich gefälligst mitgetheilten Nachricht ist der Druck dieser Sammlung bereits ziemlich vorgeschritten. Sie wird zugleich ein systematisches Verzeichnifs der Werke *Eulers* enthalten. Titel und Inhalt (schreibt Herr etc. *Fufs*) werden folgende sein.

„*Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18 sciècle, tirée des archives centrales de Moscou et de celle de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg, et précédée d'une liste complète systematique des travaux d'Euler et d'une notice sur ses écrits inédits.*

I. Band. Vorrede: Ueber die Entstehung der Sammlung. Biographische und literar-historische Notizen. Nachricht über *Euler*'s Schriften. Systematisches Verzeichnifs derselben.

Briefwechsel zwischen *Euler* und *Goldbach*, 1729—1766 (96 Briefe von *Euler*, 84 von *Goldbach*).

II. Band. Briefe *Johann Bernoulli* des Aeltern an *Euler*, 1728—1746 (14 Briefe).

Briefwechsel zwischen *Nic. Bernoulli* (*Joh.* fil.) und *Goldbach*, 1721—1725 (27 Briefe).

Briefwechsel zwischen *Dan. Bernoulli* und *Goldbach*, 1723 bis 1730 (71 Briefe).

Briefe *Dan. Bernoulli's* an *Euler*, 1727—1755 (58 Briefe).

Briefe desselben an *Nic. Fufs*, 1773—1778 (5 Briefe).

Briefe *Nic. Bernoulli's*, des Neffen von *Joh.* und *Jacob*, an *Euler*, 1742, 1743 (4 Briefe).

Briefe an *Euler* von *Naudé,* 1740 (1 Brief).
\- - - - - - - *Clairaut,* 1740 (2 Briefe).
\- - - - - - - *Cramer,* 1743—1750 (7 Briefe).
\- - - - - - - *Lambert,* 1758—1762 (7 Briefe).

Dem 1sten Bande hoffe ich das Bild *Eulers,* dem 2ten das *Daniel Bernoulli's* beizugeben, ersteres nach dem (nach meines Vaters Ausspruch sehr ähnlichen) *Darbes*'schen, von *Küttner* gestochenen Bilde, letzteres nach einem bei der Akademie befindlichen Oelgemälde; beide werde ich in Kupfer stechen lassen."

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXIII, Heft 3. TAF. III.

Fac-simile einer Handschrift von Lagrange

Contour Page 193 feuille 25

A l'égard des coefficiens A, B, C &c. du polinome ..., on pourra les calculer de la maniere suivante

On commencera par determiner les sommes des puissances par ces formules

$\Sigma\alpha = a$

$\Sigma\alpha^2 = a\Sigma\alpha - 2b$

$\Sigma\alpha^3 = a\Sigma\alpha^2 - b\Sigma\alpha + 3c$

&c.

Ensuite on cherchera les termes n^{mes} des series

$\Sigma\alpha = a$, $\Sigma\alpha\beta = b$, $\Sigma\alpha\beta\gamma = c$ &c.

$\Sigma\alpha^2$, $\Sigma\alpha^2\beta^2 = \frac{\Sigma\alpha^2 \times \Sigma\alpha^2 - \Sigma\alpha^4}{2}$, $\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{\Sigma\alpha^2\beta^2 \times \Sigma\alpha^2 - \Sigma\alpha^2 \times \Sigma\alpha^4 + \Sigma\alpha^6}{3}$ &c.

$\Sigma\alpha^3$, $\Sigma\alpha^3\beta^3 = \frac{\Sigma\alpha^3 \times \Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^6}{2}$, $\Sigma\alpha^3\beta^3\gamma^3 = \frac{\Sigma\alpha^3\beta^3 \times \Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^3 \times \Sigma\alpha^6 + \Sigma\alpha^9}{3}$ &c.

13.

Ueber einige Sätze des Herrn Prof. Steiner.

(Von Dr. *F. Heinen*, Director der Realschule zu Düsseldorf.)

Lehrsätze (Bd. XV. S. 373. No. 1. 3. 4.).

I. *Sind beliebige n Ebenen A, B, C, D, ... gegeben, und legt man durch irgend einen festen Punct K eine willkürliche Ebene P, nennt die Winkel, welche diese mit ihnen bildet, beziehlich α, β, γ, δ, ..., und multiplicirt die Cosinus dieser Winkel beziehlich mit beliebigen gegebenen Gröfsen a, b, c, d, ..., so wird die Summe dieser Producte irgend einen Werth S haben, so dafs*

$$a.\cos\alpha + b.\cos\beta + c.\cos\gamma + d.\cos\delta + \ldots = S$$

ist. Soll nun die Ebene P um den festen Punct K sich so bewegen, dafs (wenn auch die Winkel α, β, γ, δ, ... sich ändern) die Summe S constant bleibt, so berührt sie stets irgend einen geraden Kegel (zweiten Grades), dessen Axe Q fest ist, d. h. die unzähligen Kegel K, welche auf diese Weise entstehen, wenn man die beschreibende Ebene in immer anderer ursprünglicher Lage annimmt, wo zugleich der Werth S sich ändert, haben eine gemeinschaftliche Axe Q. Die Grenzen der Kegelschaar sind einerseits die Axe Q, wo der Erzeugungswinkel des Kegels $= 0$ *ist, und andrerseits diejenige Ebene R, welche im Puncte K auf der Axe Q senkrecht steht, und wo der Erzeugungswinkel* $= \frac{1}{2}\pi$ *ist. In diesen Grenzen erreicht der Werth S sein Minimum und Maximum.*

Beweis. Denkt man sich auf jeder der n Ebenen $A, B, C, D, \ldots$ ein Polygon verzeichnet, und nimmt an, dafs die Inhalte derselben beziehlich den beliebig gegebenen Gröfsen $a, b, c, d, \ldots$ gleich seien, so stellen die Ausdrücke $a.\cos\alpha$, $b.\cos\beta$, $c.\cos\gamma$, u. s. w. die orthographischen Projectionen dieser Vielecke auf die durch den festen Punct K gelegte Ebene P dar. Nun giebt es bekanntlich für eine beliebige Anzahl von ebenen Flächenstücken von durchaus willkürlicher Lage stets eine Ebene, für welche die Summe ihrer Projectionen ein Maximum ist und deren relative Lage vollkommen und nur auf eine einzige Weise durch die Projectionen der Flächenstücke auf drei willkürlich gewählte, unter sich recht-

winklige Ebenen bestimmt ist. Diese Ebene hat auch die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Summe der Projectionen der Flächenstücke auf alle andere Ebenen, welche gleiche Neigung gegen sie haben, ein und dieselbe ist, indem, wenn die Summe der Projectionen auf dieselbe mit S_1, die Summe der Projectionen auf irgend eine andere Ebene P mit S und der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen mit χ bezeichnet wird, stets

$$S = S_1 . \cos\chi$$

ist, wie u. a. sich in *Poissons* Mechanik Th. I. S. 87 u. f. der Uebers. von *Schmidt* bewiesen findet. Denkt man sich also diese Ebene der gröfsten Projectionen durch den Punct K gehend, was offenbar erlaubt ist, da bekanntlich für die Gröfse der Projection eines Flächenstückes auf eine Ebene die absolute Lage dieser letztern völlig gleichgültig ist, und die Ebene P sich um K so bewegt, dafs die Summe S stets constant bleibt, so mufs auch $\cos\chi$, folglich ihr Neigungswinkel gegen die Ebene der gröfsten Projectionen unveränderlich bleiben. Sie berührt daher in allen ihren verschiedenen Lagen einen geraden Kegel, dessen Axe eine im Puncte K auf der letztgenannten Ebene senkrechte Gerade ist. Geht die Ebene P ursprünglich durch diese Gerade, so ist, da alsdann $\chi = 0$ ist, $S = 0$, und diese Lage entspricht offenbar einem Minimum; so wie der Fall, wo das Maximum eintritt, von selbst durch das Obige erledigt ist.

II. *Nimmt man auf der Axe AB* (Fig. 1.) *einer Ellipse zwischen ihren Brennpuncten C, D irgend einen Punct X an, und beschreibt mit den Abschnitten AX, BX, in welche dieser Punct die Axe theilt, beziehlich aus den Brennpuncten C, D zwei Kreise, welche sich in zwei Puncten a, b der Ellipse schneiden, und mit denselben Abschnitten beziehlich aus den Brennpuncten D, C Kreise, welche sich in zwei anderen Puncten α, β der Ellipse schneiden, so sind die Verbindungslinien aβ, bα der auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegenden Durchschnittspuncte zwei unter sich gleiche, gegen die Axe unter gleichen Winkeln geneigte Durchmesser. Macht man dieselbe Construction für einen andern Punct X' der Axe AB zwischen den Brennpuncten C, D, so sind die Durchmesser, a'β', b'α', welche ihm entsprechen, den Durchmessern aβ, bα des ersten Punctes X stets zugeordnet, wenn X' mit X auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunctes M der Ellipse und zwar so liegt, dafs die Summe der Quadrate der Abstände XM, X'M dieser Puncte vom Mittelpuncte gleich dem Quadrate der Excentricität ist.*

Beweis. Zieht man nach den Durchschnittspuncten a, b, α, β, welche, da die Summe ihrer Entfernungen von den Brennpuncten C, D gleich der großen Axe ist, bekanntlich auf der Ellipse liegen, Leitstrahlen, so sind, weil $Ca = D\beta = Cb = D\alpha$ und $Da = Db = C\alpha = C\beta$ ist, die Vierecke $aC\beta D$ und αCbD, welche die Diagonale CD gemein haben, einander congruente Parallelogramme, daher die Diagonalen $a\beta$, αb sowohl Durchmesser, als einander gleich und unter gleichen Winkeln aMC, αMD gegen die andere Diagonale oder die Axe AB geneigt. Nach einem bekannten Satze ist nun

$$(Ca)^2+(Da)^2 = 2(Ma)^2+2(CM)^2,$$

oder, wenn A die halbe grofse, B die halbe kleine Axe der Ellipse bezeichnen, und $Ca = AX$, $Da = 2A - Ca = 2A - AX$, $CM = \sqrt{(A^2-B^2)}$ gesetzt werden,

$$(AX)^2+(2A-AX)^2 = 2(Ma)^2+2(A^2-B^2).$$

oder endlich:

$$1.\quad (AX)^2-2A.AX = (Ma)^2-(A^2+B^2).$$

Eben so hat man offenbar für einen der Halbmesser $a'M$, welche dem Puncte X' entsprechen würden:

$$2.\quad (AX')^2-2A.AX' = (Ma')^2-(A^2+B^2),$$

also, gemäfs (1.) und (2.),

$$(AX)^2+(AX')^2-2A(AX+AX') = (Ma)^2+(Ma')^2-2(A^2+B^2).$$

Der Punct X ist aber so angenommen, dafs $(MX)^2+(MX')^2 = (MC)^2$, also $(AX)^2+(AX')^2-2A(AX+AX') = -(A^2+B^2)$ ist, mithin wird die vorige Gleichung:

$$A^2+B^2 = (aM)^2+(a'M)^2,$$

und die Halbmesser aM, $a'M$ sind also, nach einem bekannten Satze einander zugeordnet.

Ist $MX' = MX = MC\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist offenbar auch $AX = BX'$, also fallen nun die Puncte a' und α, b' und β, α' und a, β' und b zusammen, und die beiden zugeordneten Durchmesser $a\beta$, $a'\beta'$ sind mithin alsdann einander gleich.

Liegt der Punct X im Mittelpuncte M, ist also $MX = 0$, so folgt aus $(MX)^2+(MX')^2 = (MC)^2$, dafs der entsprechende Punct X' in einem der Brennpuncte liegt, und umgekehrt; auch sieht man auf der Stelle, dafs nach der obigen Construction der Mittelpunct die kleine, ein Brennpunct dagegen die grofse Axe als zugeordnete Durchmesser liefern.

Es leuchtet endlich von selbst ein, dafs, um in allen Fällen den Punct X' zu construiren, welcher zu dem Puncte X gehört, man nur über MD einen Halbkreis zu beschreiben und die Sehne $ME = MX$ zu nehmen habe, indem alsdann die andere Sehne $ED^2 = MD^2 - ME^2 = MD^2 - MX^2 = (MX')^2$ ist.

Der analoge Satz für die Hyperbel ist folgender.

III. *Nimmt man auf der Verlängerung der Axe AB* (Fig. 2.) *einer Hyperbel, über ihre Brennpuncte C, D hinaus, irgendwo einen Punct X an und beschreibt mit den Abschnitten der Axe AX, BX beziehlich aus den Brennpuncten C, D zwei Kreise, welche sich in zwei Puncten a, b der Hyperbel schneiden werden, und mit denselben Abschnitten beziehlich aus den Brennpuncten D, C zwei Kreise, welche sich in zwei anderen Puncten α, β der Hyperbel schneiden, so sind die Verbindungslinien $a\beta$, $b\alpha$ der auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegenden Durchschnitts-Puncte zwei unter sich gleiche, gegen die Axe unter gleichen Winkeln geneigte Durchmesser. Macht man dieselbe Construction für einen Punct X' auf der ihr zugeordneten Hyperbel, welcher auf der Verlängerung der Axe $A'B'$ dieser zweiten Hyperbel über einen ihrer Brennpuncte C', D' angenommen ist, so erhält man auch für diese zwei unter sich gleiche Durchmesser $a'\beta'$, $b'\alpha'$, und zwar sind die letzteren Durchmesser die zugeordneten von jenen, wenn die Entfernungen MX, MX' der Puncte X, X' auf den beiden Axen von dem gemeinsamen Mittelpuncte M der beiden Hyperbeln einander gleich sind.*

Beweis. Zieht man nach den Durchschnittspuncten a, b, α, β, welche, da die Unterschiede ihrer respectiven Entfernungen von den Brennpuncten C, D gleich der Axe AB sind, auf der Hyperbel liegen, Leitstrahlen, so sind wieder die Vierecke $CaD\beta$, $C\alpha Db$, aus denselben Gründen, wie oben, congruente Parallelogramme, daher gehen ihre Diagonalen $a\beta$, $b\alpha$ durch den Mittelpunct M, sind einander gleich und unter gleichen Winkeln gegen die Axe AB geneigt. Auch ist

$$(Ca)^2 + (Da)^2 = 2(aM)^2 + 2(CM)^2$$

oder, da $aC = AX$, $aD = 2A + aC = 2A + AX$ und $CM = \surd(A^2 + B^2)$ ist, wo A die halbe Axe AM, B die halbe Axe $A'M$ bezeichnen,

$$(AX)^2 + (2A + AX)^2 = 2(aM)^2 + 2(A^2 + B^2),$$

oder endlich:

$$1. \quad (AX)^2 + 2A.AX = (aM)^2 + B^2 - A^2.$$

Eben so findet man für den Halbmesser $a'M$, welcher der conjugirten Hyperbel angehört und mittelst der Abschnitte $A'X'$, $B'X'$ der Axe $A'B'$ und der Brennpuncte C', D' ganz auf ähnliche Weise, wie aM mittelst AX, BX und der Brennpuncte C, D construirt ist:

$$2.\quad (A'X')^2+2B.A'X' = (a'M)^2+A^2-B^2.$$

Aus (1.) und (2.) ergiebt sich demnach

$$(AX)^2+2A.AX-(A'X')^2-2B.A'X' = (aM)^2-(a'M)^2+2(B^2-A^2).$$

Da aber $MX'=B+A'X'=MX=A+AX$ ist, so hat man auch

$$(AX)^2+2A.AX-(A'X')^2-2B.A'X' = B^2-A^2$$

und die vorige Gleichung giebt also

$$A^2-B^2 = (aM)^2-(a'M)^2,$$

woraus bekanntlich folgt, dafs $a'M$ der zugeordnete Halbmesser von aM ist.

Liegt X in einem der Brennpuncte C, D, so liegt X' in einem der Brennpuncte C', D' der conjugirten Hyperbel.

IV. *Zieht man von irgend einem Puncte E* (Fig. 3.) *einer Ellipse durch ihre beiden Brennpuncte C, D gerade Linien, und schneidet man auf beiden, von dem beliebig angenommenen Puncte E aus (nach den Brennpuncten hin) zwei Stücke, beziehlich EF, ED, gleich der halben grofsen Axe der Ellipse ab, so liegen die Endpuncte F, G dieser Stücke auf einem Durchmesser, welcher dem vom Mittelpuncte M der Ellipse nach jenem Puncte gezogenen Durchmesser ME zugeordnet ist.*

V. *Zieht man von den Brennpuncten C, D* (Fig. 4.) *einer Hyperbel nach irgend einem Puncte E, auf einem Zweige derselben, etwa auf demjenigen, welcher den Brennpunct C umschliefst, zwei Leitstrahlen, und verlängert den kürzern Leitstrahl CE um ein Stück EF, gleich der halben Haupt-Axe der Hyperbel, schneidet dagegen auf dem andern, längern Leitstrahle ED ein Stück EG von derselben Länge ab, so liegen die Endpuncte F, G dieser Stücke stets auf einem Durchmesser, welcher dem vom Mittelpuncte M der Hyperbel nach jenem Puncte gezogenen Durchmesser ME zugeordnet ist.*

Beweis zu IV. und V. Bezeichnet A die halbe grofse Axe der Ellipse, so ist, wenn der Punct E (Fig. 3.) etwa mit C auf derselben Seite der kleinen Axe liegt, $EF=A>EC$, also $CF=EF-EC=A-EC$, und $DG=ED-EG=ED-A$, oder, da bekanntlich $ED=2A-EC$ ist, $GD=A-EC$, mithin $CF=DG$. Bezeichnet eben so A die halbe Haupt-Axe der Hyperbel, so ist (Fig. 4.) $CF=EC+EF=EC+A$

und $DG = ED - EG = ED - A$, oder, da nun $ED = EC + 2A$ ist, $DG = EC + A$, mithin auch nun $CF = DG$. In beiden Fällen ist aber, aufserdem, dafs $EF = EG$ ist, auch $CM = MD$, mithin findet in beiden die Gleichung statt:

$$CM.DG.EF = MD.EG.CF,$$

woraus bekanntlich folgt, dafs die Puncte F, G mit M in gerader Linie. also auf einem Durchmesser liegen. Dafs aber dieser Durchmesser dem Durchmesser ME zugeordnet ist, ergiebt sich auf der Stelle, wenn man nur die Halbirungslinie EH des Winkels EFG zieht, indem diese Linie in beiden Fällen bekanntlich eine Normale an die Curven ist und auf der Grundlinie FG des gleichschenkligen Dreiecks FEG senkrecht steht, woraus von selbst folgt, dafs FG mit der Tangente in E parallel ist, also die Richtung des zugeordneten Durchmessers von EM hat.

Beide Sätze lassen sich übrigens auch anders ausdrücken und etwa auf folgende Weise in Einen zusammenfassen:

„Bewegt sich ein gleichschenkliges Dreieck EFG, dessen Schen-„kel EF, EG constant sind, so, dafs seine drei Seiten oder deren Ver-„längerungen beständig durch die Endpuncte C, D und den Halbirungspunct „M einer Geraden CD und zwar die Grundlinie FG stets durch den letz-„tern Punct M gehen, so beschreibt die Spitze E des Dreiecks eine El-„lipse oder eine Hyperbel, je nachdem die constante Länge des Schenkels „gröfser oder kleiner als die Hälfte CM der Geraden ist. In beiden Cur-„ven sind die Endpuncte C, D die Brennpuncte, der Halbirungspunct M „natürlich der Mittelpunct und die constante Länge des Schenkels ist gleich „der halben grofsen oder der halben Haupt-Axe; endlich liegt die Grund-„linie FG stets auf einem Durchmesser, welcher dem vom Mittelpunct M „nach der Spitze gezogenen Durchmesser zugeordnet ist."

(Die andere Aussage, welche dem Satze V. im XV. Bande S. 373 auch gegeben ist, ist daher nicht völlig genau, indem offenbar nicht für jede constante Länge des Schenkels, sondern nur in dem eben näher bezeichneten Falle die Curve, welche von der Spitze beschrieben wird, eine Hyperbel ist.)

Für die gleichnamigen sphärischen Kegelschnitte gelten den obigen ganz analoge Sätze, welche nur darin von jenen abweichen, dafs die sphärische Gerade FGM die Tangente in dem beliebig auf dem Kegelschnitte angenommenen Puncte E in zweien Puncten trifft, welche um

$90°$ von E abstehen, also nur, wenn E in einem der Scheitel liegt, auf den EM zugeordneten Durchmesser fällt.

Der Beweis ergiebt sich theils aus der Bedingungsgleichung:

$$\sin CM \sin DG . \sin EF = \sin MD . \sin EG . \sin CF,$$

welche, weil man wieder in beiden Fällen $DG = CF$ hat, offenbar erfüllt ist, und bekanntlich anzeigt, dafs die Puncte F, G mit M in derselben sphärischen Geraden liegen, theils daraus, dafs der Durchmesser FGM und die Tangente in E auf der Halbirungslinie EH des Winkels FEG, welche wieder eine Normale an den Kegelschnitt ist, senkrecht stehen.

Lehrsätze (Bd. XVI. S. 90. No. 16. I. II. III. IV. und No. 26.).

I. *Wird eine unbegrenzte prismatische (oder cylindrische) Säule von beliebigen Ebenen, welche nicht mit den Kanten derselben parallel sind, geschnitten, so liegen die Schwerpuncte der Flächen der Durchschnittsfiguren alle in einer bestimmten Geraden, welche den Kanten der Säule parallel ist.*

Beweis. Betrachten wir zunächst ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundflächen ABC und $A'B'C'$ heifsen mögen. Gehören nun BC und $B'C'$ als Randkanten derselben Seitenfläche an, und ist m die Mitte von BC, m' die Mitte von $B'C'$, so ist die Linie mm' offenbar der Seitenkante AA' parallel. Nun liegt der Schwerpunct s des Dreiecks ABC bekanntlich auf der Linie Am, in einer Entfernung von m, welche gleich $\frac{1}{3}Am$ ist, und der Schwerpunct s' von $A'B'C'$ auf der entsprechenden Linie $A'm'$, in einer Entfernung von m', welche gleich $\frac{1}{3}A'm'$ ist; verbindet man also diese beiden Schwerpuncte durch eine gerade Linie, so ist dieselbe, nach einem bekannten Satze, der Kante AA' ebenfalls parallel, oder, mit andern Worten: der Schwerpunct s' von $A'B'C'$ liegt fortwährend, welche Lage auch $A'B'C'$ gegen ABC haben möge, auf einer durch den Schwerpunct s von ABC mit den Kanten AA', BB', CC' parallel gezogenen Geraden.

Hat die prismatische Säule aber eine beliebige Anzahl von Seitenflächen und bezeichnen A, B, C, D, ... N die Eckpuncte eines auf der Richtung der Seitenkanten senkrechten Schnittes, A', B', C', D', ... N' die bezichlich zu denselben Seitenkanten gehörenden Eckpuncte irgend eines andern Schnittes, welcher gegen jenen unter einem beliebigen Winkel α geneigt ist, so denke man sich beide Durchschnittsfiguren durch ent-

sprechende Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt, deren Inhalte beziehlich mit a_1, a_2, a_3 u. s. w., und mit a'_1, a'_2, a'_3 u. s. w. bezeichnet sein mögen. Vergleicht man nun die Lage der Schwerpuncte des senkrechten Schnittes $ABCD \ldots . N = S$ und seiner einzelnen Dreiecke, von den Inhalten a_1, a_2, a_3 u. s. w., so wie des beliebigen Schnittes $A'B'C'D' \ldots . N' = S'$ und seiner einzelnen Dreiecke, von den Inhalten a'_1, a'_2, a'_3 u. s. w., gegen irgend zwei aneinanderstofsende Seitenflächen der prismatischen Säule, und bezeichnet ihre senkrechten Abstände von denselben entsprechend mit X, x_1, x_2, x_3 u. s. w. und Y, y_1, y_2, y_3 u. s. w., so wie mit X', x'_1, x_2, x'_3 u. s. w. und Y', y'_1, y'_2, y'_3 u. s. w., so hat man bekanntlich für den Schnitt $ABCD \ldots . N$ die beiden Gleichungen:

$$S.X = a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + \ldots .,$$
$$S.Y = a_1.y_1 + a_2.y_2 + a_3.y_3 + \ldots .,$$

und für den Schnitt $A'B'C'D' \ldots . N'$:

$$S'.X' = a'_1.x'_1 + a'_2.x'_2 + a'_3.x'_3 + \ldots .,$$
$$S'.Y' = a'_1.y'_1 + a'_2.y'_2 + a'_3.y'_3 + \ldots .$$

Multiplicirt man jede der beiden letzten Gleichungen mit $\cos\alpha$ und beachtet, dafs $S'.\cos\alpha = S$, $a'_1.\cos\alpha = a_1$, $a'_2.\cos\alpha = a_2$, $a'_3.\cos\alpha = a_3$ u. s. w. ist, und, dafs nach dem oben Bewiesenen die Schwerpuncte je zweier sich entsprechender Dreiecke in den beiden Durchschnittsfiguren auf geraden Linien liegen, welche den Kanten, mithin auch den Seitenflächen der prismatischen Säule parallel sind, dafs folglich $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1$, $x'_2 = x_2$, $y'_2 = y_2$, $x'_3 = x_3$, $y'_3 = y_3$ u. s. w. ist, so ergiebt sich aus der Vergleichung der letztern Gleichungen mit den erstern sofort, dafs auch stets $X' = X$, $Y' = Y$ ist. Mithin liegt der Schwerpunct des Schnittes $A'B'C'D' \ldots . N'$, wie auch der Winkel α beschaffen sein möge, immer auf einer und derselben den Seitenkanten parallelen Linie.

Diese Gerade wollen wir, nach dem Vorgange des Herrn Prof. *Steiner*, „die barycentrische Axe" der prismatischen Säule nennen.

II. *Der Inhalt jedes beliebigen, schief oder parallel abgeschnittenen Prismas (oder Cylinders) ist gleich:*

1. *dem Producte aus einem beliebigen, auf der Richtung der Seitenkanten senkrechten Schnitte in die Länge der barycentrischen Axe des Prismas; oder gleich*
2. *dem Producte aus einer jeden der beiden Grundflächen in das vom Schwerpuncte der anderen auf sie gefällte Perpendikel.*

Beweis zu 1. Es seien $A'B'C'D'\ldots.N$ und $A''B''C''D''\ldots.N''$ die beiden Grundflächen irgend eines Prismas, s' der Schwerpunct der einen und s'' der Schwerpunct der anderen Grundfläche, also $s's''$ die Länge der barycentrischen Axe. Der auf der Richtung der Kanten senkrecht stehende Schnitt $ABCD\ldots.N$ sei, um die Ideen zu fixiren, so angenommen, dafs das ganze Prisma auf *einer* Seite desselben und er selbst der Grundfläche $A'B'C'D'\ldots.N'$ zunächst liege. Denkt man sich nun diesen Schnitt $ABCD\ldots.N = S$ durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, deren Inhalte mit a_1, a_2, a_3 u. s. w. bezeichnet sein mögen, und durch diese Diagonalen und die anstofsenden Seitenkanten der Säule Ebenen gelegt, so werden hierdurch auch die beiden Grundflächen $A'B'C'D'\ldots.N'$ und A'', B'', C'', D'', ... N'' des Prismas in Dreiecke und die gesammte Säule wird in dreiseitige Säulen zerlegt. Bekanntlich ist aber der Inhalt einer jeden begrenzten dreiseitigen Säule gleich dem Producte einer ihrer Grundflächen in den dritten Theil der Summe der von den Eckpuncten der anderen Grundfläche auf sie gefällten Perpendikel, oder auch in das vom Schwerpuncte der anderen auf sie gefällte Perpendikel, da der Schwerpunct eines Dreiecks mit dem Schwerpuncte seiner drei Spitzen zusammenfällt. Bezeichnen also Z', z'_1, z'_2, z'_3 u. s. w. die vom Schwerpuncte s' der Grundfläche $A'B'C'D'\ldots.N'$ und den Schwerpuncten ihrer einzelnen Dreiecke, und eben so Z'', z''_1, z''_2, z''_3 u. s. w. die vom Schwerpuncte s'' der Grundfläche $B''B''C''D''\ldots..N''$ und den Schwerpuncten ihrer einzelnen Dreiecke auf den senkrechten Schnitt $ABCD\ldots.N$ gefällten Perpendikel, so hat man für den Inhalt I'' der gröfseren prismatischen Säule, welche $ABCD\ldots.N$ und $A''B''C''D''\ldots.N''$ zu Grundflächen hat:

$$I'' = a_1.z''_1 + a_2.z''_2 + a_3.z''_3 + \ldots.$$

und für den Inhalt I' der kleineren prismatischen Säule, welche zwischen $ABCD\ldots.N$ und $A'B'C'D'\ldots.N'$ liegt:

$$I' = a_1.z'_1 + a_2.z'_2 + a_3.z'_3 + \ldots.$$

Bekanntlich ist aber

$$S.Z'' = a_1.z''_1 + a_2.z''_2 + a_3.z''_3 + \ldots.$$

und

$$S.Z' = a_1.z'_1 + a_2.z'_2 + a_3.z'_3 + \ldots.;$$

mithin ist der Inhalt I des zwischen $A'B'C'D'\ldots.N'$ und $A''B''C''D''\ldots.N''$ enthaltenen Prismas $= I''-I' = S(Z''-Z')$, oder, da der Schnitt $ABCD\ldots.N$ auch auf der barycentrischen Axe senkrecht steht, also

$Z'' - Z' = s's''$ ist, $= S.s's''$, also, wie behauptet wurde, gleich dem senkrechten Schnitte, multiplicirt mit der Länge der barycentrischen Axe.

Es folgt hieraus von selbst, dafs „wenn man in der barycentrischen Axe einer prismatischen Säule irgend zwei Puncte annimmt, und durch jeden derselben eine Ebene legt, welche die Säule und ihre Kanten schneidet, so dafs ein schief oder parallel abgeschnittenes Prisma entsteht, dieses Prisma immer den nämlichen Inhalt habe, welche Lage man auch den schneidenden Ebenen geben mag, wenn dieselben nur stets durch jene beiden festen Puncte gehen."

Beweis zu 2. Nennt man den Winkel, welchen z. B. die Grundfläche $A'B'C'D'....N' = S'$ mit einem auf der barycentrischen Axe senkrechten Schnitt S macht, α, so ist bekanntlich $S'.\cos\alpha = S$, und man überzeugt sich auch leicht, dafs, wenn p die Länge des von dem Schwerpuncte s'' der anderen Grundfläche auf $A'.B'.C'.D'....N'$ gefällten Perpendikels bezeichnet, stets $s's'' = \frac{p}{\cos\alpha}$ sei. Substituirt man die Werthe von S und $s's''$ in die obige Formel $I = S.s's''$, so geht sie in $I = S'.p$ über, oder es ist „der Inhalt eines beliebigen Prismas gleich dem Producte einer jeden seiner Grundflächen in das vom Schwerpuncte der anderen auf sie gefällte Perpendikel."

Dafs „der Inhalt einer Grundfläche (oder irgend eines Schnittes) um so kleiner sei, je mehr der Neigungswinkel der barycentrischen Axe gegen dieselbe sich einem rechten nähert," läfst sich allerdings, wie Bd. XVI. S. 90 angeführt wird, aus dem letztern Satze oder der Formel $I = S'.p$ leicht herleiten, indem, wenn man sich die Grundfläche um ihren Schwerpunct beliebig gedreht denkt, I, wie oben bemerkt worden, unveränderlich bleibt, dagegen p offenbar um so gröfser wird, je mehr der Winkel der barycentrischen Axe gegen diese Fläche sich einem rechten nähert, möchte aber wohl einfacher als eine unmittelbare Folgerung der bekannten Relation $S = S'.\cos\alpha$ angesehen werden können.

Es mag nicht unpassend sein, wenn wir hier dem Satze 1. einen andern anschliefsen, welcher sich ganz analog ausdrücken läfst, nämlich:

III. *Die convexe Oberfläche eines beliebigen, schief oder parallel abgeschnittenen Prismas (oder Cylinders) ist gleich dem Producte seines Umfanges in die Länge einer durch den Schwerpunct des Umfanges, mit jener Axe parallel gezogenen und von den beiden Grundflächen begrenzten Geraden.*

Der Inhalt einer jeden einzelnen Seitenfläche des Prismas ist nämlich, als der eines Trapezes, gleich dem Producte der auf ihr liegenden Seite jenes senkrechten Schnittes in die Länge der geraden Linie, welche durch die Mitte oder den Schwerpunct dieser Seite mit den Seitenkanten oder der barycentrischen Axe parallel gezogen und von den Randkanten begrenzt wird. Die gesammte convexe Fläche ist also gleich der Summe aller so gebildeter Producte, oder, wie man leicht einsieht, gleich dem Umfange des ganzen Schnittes in die Länge der durch den Schwerpunct dieses Umfanges mit der barycentrischen Axe parallel gezogenen und von den Grundflächen begrenzten Geraden.

IV. *Sind von einem beliebigen Prisma (oder Cylinder) die eine Grundfläche, die Lage der Seitenflächen, oder die Richtung der Längenkanten und der Körper-Inhalt gegeben, so ist die Gröfse und Lage der anderen Grundfläche zwar unbestimmt, aber in allen ihren unzähligen verschiedenen Lagen geht sie stets durch einen und denselben bestimmten Punct, welcher zugleich ihr Schwerpunct ist und auf der barycentrischen Axe des Prisma's liegt.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von I. und II. Denn nach I. liegt der Schwerpunct der veränderlichen Grundfläche stets auf der barycentrischen Axe, deren Lage offenbar durch die feste Grundfläche und die Richtung der Seitenkanten vollkommen bestimmt ist; und nach II. bleibt auch, wenn der Inhalt I und die Grundfläche S' sich nicht ändern, p oder die Entfernung des Schwerpunctes der veränderlichen Grundfläche von der Ersten, fortwährend dieselbe.

Wie man die obigen Sätze I. II. III. IV., welche für Prismen von einer beliebigen Anzahl von Seitenflächen gelten, auf Cylinder ausdehnen könne, ist bekannt, und bedarf hier keiner weiteren Erörterung.

V. *Wenn die Grundfläche einer Pyramide der Form und Gröfse nach, und wenn die Summe der an der Spitze liegenden Kanten gegeben ist, so ist ihr Inhalt dann ein Maximum, wenn jede durch die Spitze der Grundfläche parallel gezogene Gerade mit jenen Kanten Winkel* α, β, γ, ... *bildet, für welche stets die Gleichung* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \ldots = 0$ *statt findet.*

Beweis. Es sei P die Spitze einer beliebigen Pyramide, $ABCD \ldots N$ ihre Grundfläche und S die Summe aller an der Spitze liegenden Kanten derselben. Nimmt man nun die Grundfläche als die Ebene der XY eines

rechtwinkligen Coordinaten-Systems an und bezeichnet die Coordinaten der Spitze *P* mit x, y, z, die Ordinaten und Abscissen der Eckpuncte der Grundfläche mit y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4, x_4 u. s. w., so mufs, damit der Inhalt ein Maximum sei, z offenbar ein Maximum werden. Es ist aber:

$$\sqrt{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2)}+\sqrt{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2)}$$
$$+\sqrt{((x-x_3)^2+(y-y_3)^2+z)}+\ldots = S.$$

Differenzirt man diese Gleichung in Bezug auf x und z, so wie in Bezug auf y und z, so erhält man:

$$\frac{x-x_1}{PA}+\frac{x-x_2}{PB}+\frac{x-x_3}{PC}+\ldots = -\frac{dz}{dx}\left[\frac{z}{PA}+\frac{z}{PB}+\frac{z}{PC}+\ldots\right],$$
$$\frac{y-y_1}{PA}+\frac{y-y_2}{PB}+\frac{y-y_3}{PC}+\ldots = -\frac{dz}{dy}\left[\frac{z}{PA}+\frac{z}{PB}+\frac{z}{PC}+\ldots\right].$$

Setzt man also $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}=0$, wie das Maximum von z bekanntlich verlangt, so ergiebt sich:

$$\frac{x-x_1}{PA}+\frac{x-x_2}{PB}+\frac{x-x_3}{PC}+\ldots = 0,$$
$$\frac{y-y_1}{PA}+\frac{y-y_2}{PB}+\frac{y-y_3}{PC}+\ldots = 0,$$

Da jede dieser Gleichungen für jede Lage der Axen statt findet, so ist das Maximum durch eine derselben offenbar vollständig characterisirt. Die erstere aber bezeichnet nichts anders, als dafs die Summe der Cosinus der Winkel, welche die Kanten *PA, PB, PC,* .... mit einer beliebigen (als Axe der *X* hier angenommenen) Geraden in der Ebene der Grundfläche, also auch mit jeder durch die Spitze der Grundfläche parallel gezogenen Geraden bildet, = 0 sei.

Cleve, den 29. Nov. 1836.

14.

Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale.

(Von Herrn Prof Dr. *Gudermann* zu Münster.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im 1sten, No. 10. im 2ten, No. 15. im 3ten, No. 21. im 4ten Hefte des achtzehnten, No. 2. im 1sten, No. 8. im 2ten, No. 12. im 3ten Hefte des neunzehnten, No. 9. im 1sten Hefte, No. 12. im 2ten Hefte zwanzigsten und No. 15. im 3ten Hefte ein und zwanzigsten Bandes.)

Siebzehnter Abschnitt.

§. 223.

Die sieben verschiedenen Fälle der Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R die Form $A+Bx^2+Cx^4$ hat.

Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2 \pm 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4)}}$ für $\gamma < 1$.

Verstehen wir unter m und n beliebige positive, also unter m^2 und n^2 ebenfalls positive Zahlen, so kann R eine von den Formen haben:

$$\begin{aligned}
R &= m^2 \pm 2mn\gamma x^2 + n^2x^4 && \text{für } \gamma < 1,\\
R &= m^2 - 2mn\gamma x^2 + n^2x^4 && \text{für } \gamma > 1,\\
R &= m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2x^4 && \text{für } \gamma > 1,\\
R &= m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2x^4 && \text{für } \gamma \gtrless 0,\\
R &= -m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2x^4 && \text{für } \gamma \lesseqgtr 0,\\
R &= -m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2x^4 && \text{für } \gamma > 1.
\end{aligned}$$

Der zweite Fall gestattet noch eine Unter-Abtheilung, wie wir nachher sehen werden, je nachdem $\frac{nx^2}{m} < 1$ oder $\frac{nx^2}{m} > 1$ ist, so dafs es also sieben von einander zu unterscheidende Fälle der Integration giebt, welche wir der Reihe nach in Betracht ziehen werden.

Befassen wir uns zunächst mit der Integration

$$y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2+n^2x^4)}}$$

unter der Voraussetzung, dafs im Ausdrucke $R = m^2+2mn\gamma x^2+n^2x^4$ die absolute Gröfse von $\gamma < 1$ ist, dafs übrigens γ positiv oder auch negativ sein dürfe. Unter dieser Voraussetzung kann R nicht in zwei reelle quadratische Factoren von der Form $\alpha+\beta x^2$ und $\alpha'+\beta' x^2$ zerlegt werden. Stellen wir den Ausdruck zunächst also dar:

$$y = \frac{1}{m}\int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1+\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}},$$

und erinnern wir uns, dafs dem §. 47. gemäfs $u=\int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}$ ist, wenn $t=\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,u}{1+\text{cn}\,u}}$ gesetzt wird, so werden wir $1+\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4$ mit $1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4$ identificiren; hieraus folgt $\frac{nx^2}{m}=t^2$, also $x=t\sqrt{\frac{m}{n}}$ und $\frac{n}{m}\gamma x^2=(k'^2-k^2)t^2=(1-2k^2)t^2$, oder $\gamma=1-2k^2$, $\partial x=\partial t\sqrt{\frac{m}{n}}$, also $\partial y=\frac{1}{\sqrt{(mn)}}\cdot\frac{\partial t}{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}=\frac{\frac{1}{2}\partial u}{\sqrt{(mn)}}$, und da für $u=0$ $t=x=0$ ist, so folgt

1. $y=\frac{\frac{1}{2}\cdot u}{\sqrt{(mn)}}$,

2. $x=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,u}{1+\text{cn}\,u}}=\sqrt{\frac{m}{n}}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{am}\,u=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1-\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{1+\text{cn}\,u}$,

3. $k=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$.

Vertauscht man γ mit $-\gamma$, so bleibt der Modul reell; es vertauscht sich nur k mit k'.

Für $u=0$ ist $x=0$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\sqrt{\frac{m}{n}}$ und $y=\frac{\frac{1}{2}K}{\sqrt{(mn)}}$; für $u=2K$ ist $x=\frac{1}{0}$ und $y=\frac{K}{\sqrt{(mn)}}$. Setzt man $\gamma=\cos 2\theta$, so ist $k=\sin\theta$ und $k'=\cos\theta$. Ist das Integral $y=\int\frac{-\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2+n^2x^4)}}$ gegeben, so hat man nur $K-u$ für u zu setzen.

Zusatz. In manchen Fällen ist es zweckmäfsig, $2u$ für u zu setzen. Man hat dann

$$y=\frac{u}{\sqrt{(mn)}} \quad\text{und}\quad x=\sqrt{\frac{m}{n}}.\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u},$$

und die Bestimmungen des Moduls sind wieder $k=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$.

§. 224.

Die Integration $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(m^2-2mn\gamma x^2+n^2x^4)}}$ für $\gamma>1$.

Soll $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ integrirt werden und ist im Ausdrucke

$$R=m^2-2mn\gamma x^2+n^2x^4$$

die Gröfse γ positiv und zwar >1, so müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem $\frac{nx^2}{m}<1$ oder >1 ist.

1. Ist *erstens* $\frac{nx^2}{m} < 1$, so identificire man im Ausdrucke $\partial y = \frac{\partial x}{m.\sqrt{\left(1-\frac{2n}{m}\gamma.x^2+\frac{n^2x^4}{m^2}\right)}}$ die Wurzelgröfse mit dem Nenner im Ausdrucke von $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)}}$ für $t = \text{sn}\,u$; dann ist

$$\frac{nx}{m} = kt^2 \quad \text{und} \quad t^2(1+k^2) = \frac{2n}{m}\gamma.x^2, \quad \text{also} \quad \frac{1+k^2}{2k} = \gamma;$$

hieraus folgt aber durch Auflösung:

$$1. \quad k = \gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)},$$

$$2. \quad x = \sqrt{\left(\frac{mk}{n}\right)}.\text{sn}\,u,$$

$$3. \quad y = \sqrt{\frac{k}{mn}}.u.$$

Diesen Formeln gemäfs ist für $u=0$, $x=0$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\sqrt{\frac{mk}{n}}$ und $y=\sqrt{\frac{k}{mn}}.K$, und für $u=2K$ ist $x=0$ und $y=\sqrt{\frac{k}{mn}}.2K$.

Setzt man $\gamma = \frac{1}{\sin 2\theta}$, so ist $k = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$, oder

$$k = \tang\theta \quad \text{und} \quad k' = \frac{\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\cos\theta}.$$

Soll y abnehmen beim Wachsen von x, so hat man nur $K-u$ für u zu setzen. Man beachte auch, dafs $\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} = \frac{1+k}{2\sqrt{k}}$ und $\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}$, also $\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{1-k}{1+k}$ ist.

2. Ist *zweitens* $\frac{nx^2}{m} > 1$, so erinnere man sich, dafs man, wenn $t = \mathfrak{Dn}'u = \frac{1}{\text{snc}\,u}$ ist, dem §. 17. gemäfs $u = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(k^2-(1+k^2)t^2+t^4)}}$ hat; die Werthe von t, von $t=1$ an, wachsen ohne Ende.

Vergleichen wir nun mit der Formel

$$ku = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1-\frac{(1+k^2)}{k^2}t^2+\frac{t^4}{k^2}\right)}} \text{ die gegebene } y = \frac{1}{m}.\int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1-\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$$

und setzen zu dem Ende $\frac{nx^2}{m} = \frac{t^2}{k}$ und $\frac{1+k^2}{k^2}t^2 = \frac{2n}{m}\gamma.x^2$, so erhalten wir $x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)}.t$, $\partial x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)}.\partial t$, also $y = \sqrt{\frac{1}{mnk}}.ku$, oder $y = \sqrt{\frac{k}{mn}}.u$, und $\frac{1+k^2}{2k} = \gamma$; daher haben wir nun wieder

$$1.\quad k = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 1)},$$
$$2.\quad x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{snc} u},$$
$$3.\quad y = \sqrt{\left(\frac{k}{mn}\right)} . u.$$

Es ist aber für $u = 0$, $x = \sqrt{\frac{m}{nk}}$, $y = 0$; für $u = K$ ist $x = \frac{1}{0}$ und $y = \sqrt{\frac{k}{mn}} . K.$

Zusatz. Will man einen gröſseren Modul k mit einem gröſseren Argumente u dem §. 51. gemäſs einführen, so hat man in den drei Formeln *des ersten Falles* k' statt $\frac{1-k}{1+k'}$ zu setzen, und also

$$1.\quad k' = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}},$$
$$2.\quad x = \sqrt{\frac{m}{n}} . \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}},$$
$$3.\quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} . \frac{ku}{2} = \sqrt{\frac{2}{mn(\gamma+1)}} . \frac{u}{2},$$

so, daſs man, wenn man den Modul nicht weiter ändert, aber $2u$ statt u setzt,

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} . k \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} . ku, \quad \text{oder}$$
$$x = \sqrt{\frac{2m}{n(1+\gamma)}} . \operatorname{sn} u . \operatorname{snc} u \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} . u$$

erhält.

Will man auch *im zweiten Falle*, wo $\frac{nx^2}{m} > 1$ ist, statt des früheren Moduls einen gröſseren setzen, so hat man, wenn er wieder mit k bezeichnet wird, ebenfalls

$$1.\quad k = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}};$$
$$2.\quad x = \sqrt{\frac{m}{n}} . \sqrt{\frac{1 + \operatorname{dnc} u}{1 - \operatorname{dnc} u}},$$
$$3.\quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} . \frac{ku}{2} = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} . \frac{u}{2},$$

so daſs man, wenn man auch nun $2u$ statt u setzt, ohne den Modul $k = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ zu verändern,

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} . \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} . \frac{1 + k' \operatorname{tn}^2 u}{1 - k' \operatorname{tn}^2 u} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} . u$$

erhält.

§. 225.

Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma.x^2+n^2x^4)}}$ **für** $\gamma>1$.

Die vorgelegte Integration bezieht sich darauf, dafs für $t=\text{tn}\,u$, $u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4)}}$ ist. Da $y=\frac{1}{m}.\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1+\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$ ist, so setzen wir

$$\frac{n}{m}x^2=k'.t^2 \quad\text{und}\quad \frac{2n}{m}\gamma x^2=(1+k'^2)t^2.$$

Hieraus folgt $x=\sqrt{\frac{mk'}{n}}.t$, also $\partial x=\sqrt{\frac{mk'}{n}}.\partial t$, folglich

$$y=\sqrt{\frac{k'}{mn}}.\int\frac{\partial t}{\sqrt{(1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4)}}.$$

Ferner haben wir

$$\gamma=\frac{1+k'^2}{2k'},\ \text{also}\ \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1-k'},\ \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\frac{1-k'}{1+k'}$$

und

$$1.\quad k'=\gamma-\sqrt{(\gamma^2-1)},$$

$$2.\quad x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}.\text{tn}\,u,$$

$$3.\quad y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.u.$$

Diesen Formeln gemäfs ist für $u=0$ auch $x=0$ und $y=0$; aber für $u=K$ ist $x=\frac{1}{0}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.K$.

Will man statt des früheren Moduls k, dem §. 51. gemäfs, den nächst kleineren einführen und ihn wieder mit k bezeichnen, so hat man

$$k=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}},\quad k'=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$x=\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{k'\,\text{tn}\,u}{\text{dn}\,u}=\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{\text{cnc}\,u}{\text{cn}\,u}=\sqrt{\frac{m}{n}}.\sqrt{\frac{1-\text{snc}\,2u}{1+\text{snc}\,2u}},$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{mn}}.k'u=u\sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}}.$$

§. 226.

Die Integration $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2-n^2x^4)}}$ für $\gamma\gtrless 0$.

Setzt man $t=\operatorname{cnc} u$, so ist $u=\int_0\frac{\partial t}{\sqrt{(k'^2+(k^2-k'^2)t^2-k^2t^4)}}$ oder
$k'u=\int_0\frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{(k^2-k'^2)}{k'^2}t^2-\frac{k^2}{k'^2}t^4\right)}}$. Da $y=\frac{1}{m}\int_0\frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{2n}{m}\gamma.x^2-\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$
ist, so wird man

$$\frac{2n\gamma}{m}.x^2=\frac{k^2-k'^2}{k'^2}.t^2 \quad \text{und} \quad \frac{nx^2}{m}=\frac{k}{k'}.t^2$$

setzen, also $x=\sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)}.t$ und $\partial x=\sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)}.\partial t$, mithin

$$y=\sqrt{\left(\frac{k}{mnk'}\right)}.\int_0\frac{\partial t}{\sqrt{\left(1+\frac{k^2-k'^2}{k'^2}t^2-\frac{k^2}{k'^2}t^4\right)}}.$$

Da aufserdem

$$\gamma=\frac{k^2-k'^2}{2kk'}=\frac{1-\left(\frac{k'}{k}\right)^2}{2\left(\frac{k'}{k}\right)}$$

ist, so findet man

$$\frac{k'}{k}=\sqrt{(1+\gamma^2)}-\gamma, \quad \text{oder} \quad \frac{k}{k'}=\sqrt{(1+\gamma^2)}+\gamma,$$

also

1. $k=\sqrt{\frac{1+\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2+1)}}}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1-\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2+1)}}}{2}}$,

2. $x=\sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)}.\operatorname{cnc} u$,

3. $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.u=\frac{\sqrt{\frac{1}{2mn}}}{\sqrt[4]{(\gamma^2+1)}}.u.$

Hiernach ist für $u=0$ auch $x=0$ und $y=0$; für $u=K$ aber ist $x=\sqrt{\frac{mk}{nk'}}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.K$; für $x=2K$ ist $x=0$ und $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.2K$.

§. 227.

Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2+2mn\gamma.x^2+n^2x^4)}}$ für $\gamma \gtrless 0$.

Nach §. 17. ist, wenn $t=\mathfrak{Cn}'u=\frac{1}{\text{cn}\,u}$ gesetzt wird,

$$ku=\int_1\frac{\partial t}{\sqrt{\left(-1+\frac{k^2-k'^2}{k^2}t^2+\frac{k'^2}{k^2}t^4\right)}},$$

und da $y=\frac{1}{m}.\int\frac{\partial x}{\sqrt{\left(-1+\frac{2n\gamma}{m}x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$ ist, so wird man setzen:

$$\frac{2n\gamma}{m}.x^2=\frac{k^2-k'^2}{k^2}.t^2 \quad\text{und}\quad \frac{nx^2}{m}=\frac{k't^2}{k},$$

woraus $x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)}.t$ folgt, also $\partial x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)}.\partial t$, folglich $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mnk}\right)}.ku$ und

$$\gamma=\frac{k^2-k'^2}{2kk'},$$

also

$$\frac{k'}{k}=\sqrt{(1+\gamma^2)}-\gamma \quad\text{oder}\quad \frac{k}{k'}=\sqrt{(1+\gamma^2)}+\gamma.$$

Daraus folgt:

1. $k=\sqrt{\frac{1+\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2+1)}}}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1-\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2+1)}}}{2}}$,

2. $x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)}.\frac{1}{\text{cn}\,u}$,

3. $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.u=\frac{\sqrt{\frac{1}{2mn}}}{\sqrt[4]{(\gamma^2+1)}}.u.$

Für $u=0$ hat man also $x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)}$ und $y=0$; für $u=K$ hat man aber $x=\frac{1}{0}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.K$; für $u=2K$ hat man $x=-\sqrt{\frac{mk'}{nk}}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)}.2K$.

Anmerkung. Setzt man in §. 226. und §. 227. $\gamma=-\cot 2\theta$, so ist $k=\sin\theta$ und $k'=\cos\theta$, also $\frac{k}{k'}=\tang\theta$.

§. 228.

Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2+2mn\gamma x^2-n^2x^4)}}$ für $\gamma>1$.

Wird $t=\operatorname{dnc}u$ gesetzt, so ist $k'\partial u=\frac{\partial t}{\sqrt{\left(-1+\frac{(1+k'^2)}{k'^2}.t^2-\frac{t^4}{k'^2}\right)}}$ und da $\partial y=\frac{\partial x}{m\sqrt{\left(-1+\frac{2n\gamma}{m}.x^2-\frac{n^2x^4}{m^2}\right)}}$ ist, so wird man setzen:

$$\frac{2n\gamma}{m}.x^2=\frac{1+k'^2}{k'^2}.t^2 \text{ und } \frac{nx^2}{m}=\frac{t^2}{k'}.$$

Hieraus folgt $x=\sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)}.t$, $\partial x=\sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)}.\partial t$ und

$$\gamma=\frac{1+k'^2}{2k'},$$

also $\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1-k'}$, $\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\frac{1-k'}{1+k'}$, und

1. $k'=\gamma-\sqrt{(\gamma^2-1)}$,

2. $x=\sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)}.\operatorname{dnc}u=\sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}.\frac{1}{\operatorname{dn}u}$,

3. $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.u$.

Hiernach ist für $u=0$ die Gröfse $x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.K$ und für $x=2K$ ist $x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.2K$.

Will man statt des früheren Moduls, dem §. 51. gemäfs, den nächst kleineren einführen, und ihn wieder durch k, das neue Argument aber wieder durch u bezeichnen, so hat man

$$k=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}},\quad k'=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$x=\sqrt{\frac{m}{n}}.\sqrt{\frac{1-k}{1+k}.\frac{1+k\operatorname{sn}^2u}{1-k\operatorname{sn}^2u}},$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{mn}}.k'u=\sqrt{\frac{2}{mn(\gamma+1)}}.u.$$



§. 229.

Die Integration von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R eine biquadratische Form mit vier imaginären Factoren vom ersten Grade in Ansehung von x ist.

Ist $\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ zu integriren und ist $R=0$ eine biquadratische Gleichung mit vier imaginären Wurzeln, so kann R jedenfalls dargestellt werden als ein Product von zwei quadratischen Formen

$$1.\quad R=(a+2bx+cx^2)(a'+2b'x+cx^2),$$

so dafs a, b, c, a', b', c' reell sind. Die Gleichung $a+2bx+cx^2=0$ giebt zwei imaginäre Wurzeln und $a'+2bx'+c'x^2=0$ die beiden anderen.

Wir betrachten beide quadratische Formen als positiv; denn wäre die eine positiv und die andere negativ, so wäre $\sqrt{R}$ imaginär.

Wird $a+2bx+cx^2=0$ gesetzt, so erhält man $x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-ac)}}{c}$, und beide Wurzeln sind imaginär, wenn $ac-b^2$ positiv ist; aus demselben Grunde mufs $a'c'-b'^2$ positiv sein. Wir setzen also

$$2.\quad m^2=ac-b^2,\quad m'^2=a'c'-b'^2.$$

Da $a+2bx+cx^2=\frac{(a+bx)^2+m^2x^2}{a}=\frac{(cx+b)^2+m^2}{c}$ ist, so ist, da die Zähler dieser Brüche positiv sind, $a+2bx+cx^2$ nur dann positiv, wenn a und c positiv sind; aus demselben Grunde müssen a' und c' positiv sein. Von den sechs Gröfsen a, b, c, a', b', c' dürfen also nur b und b' als positiv oder negativ angesehen werden; die vier übrigen Gröfsen sind immer positiv.

Setzen wir

$$3.\quad v^2=\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2},$$

so hat man rückwärts zur Bestimmung von x die unrein-quadratische Gleichung

$$4.\quad x^2+2\left(\frac{b-b'v^2}{c-c'v^2}\right)x+\frac{a-a'v^2}{c-c'v^2}=0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$V=(b-b'v^2)^2-(a-a'v^2)(c-c'v^2),$$

so haben wir, durch Auflösung,

$$5.\quad x=\frac{-(b-b'.v^2)\pm\sqrt{V}}{c-c'v^2}=\frac{a-a'v^2}{-(b-b'v^2)\mp\sqrt{V}}.$$

also $(c-c'v^2)x+(b-b'v^2)=\pm\sqrt{V}$, oder auch $b+cx-(b'+c'x)v^2=\pm\sqrt{V}$. Das eine von den beiden Vorzeichen $\pm$ bezieht sich auf die eine, das andere auf die andere Wurzel der Gleichung (4). Wir werden unter x im Nachfolgenden diejenige Wurzel verstehen, für welche $\sqrt{V}$ das Vorzeichen $+$ hat, so dafs also

$$b+cx-(b'+c'x)v^2=\sqrt{V}$$

ist. Differenziiren wir die Gleichung $(a'+2b'x+c'x^2)v^2=a+2bx+cx^2$, so erhalten wir

$$(b'+c'x)v^2\partial x+(a'+2b'x+c'x^2)v.\partial v=(b+cx)\partial x,$$

oder

$$(b+cx-(b'+c'x)v^2)\partial x=\partial v.\sqrt{R},$$

also

$$\partial x.\sqrt{V}=\partial v.\sqrt{R},\quad \text{oder}\quad \frac{\partial x}{\sqrt{R}}=\frac{\partial v}{\sqrt{V}},$$

und also

$$6.\quad \gamma=\int\frac{\partial v}{\sqrt{V}}.$$

Das vorgelegte Differenzial ist also nun in ein ähnliches, aber einfacheres umgeformt worden; und da nun der Ausdruck V nur die zweite und vierte Potenz von v enthält, so kann das Integral nach den früheren Bestimmungen gefunden werden.

§. 230.

Entwickeln wir den Ausdruck V, so erhalten wir

$$V=-m^2+(ac'+ca'-2bb')v^2-m'^2v^4,$$

oder

$$V=-m^2+2mm'\gamma.v^2-m'^2v^4,$$

wenn wir zur Vereinfachung setzen:

$$2mm'\gamma=ac'+ca'-2bb',$$

und also

$$1.\quad \gamma=\frac{ac'+ca'-2bb'}{2\sqrt{(ac-b^2)}\sqrt{(a'c'-b'^2)}}.$$

Dem §. 228. gemäfs finden wir nun sogleich die folgenden Formeln: $\text{dn}\,u=\sqrt{\frac{mk'}{m}}.\frac{1}{v}$ oder

$$2.\quad \begin{cases}\text{dn}\,u=\sqrt{\left(\frac{mk'}{m'}\right)}.\sqrt{\frac{a+2b'x+c'x^2}{a+2bx+cx^2}}\quad\text{und}\\ \text{dnc}\,u=\sqrt{\left(\frac{m'k'}{m}\right)}.\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}},\end{cases}$$

3. $\begin{cases} k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)}, \text{ also } k = \sqrt{((2\sqrt{(\gamma^2-1)}).(\gamma-\sqrt{(\gamma^2-1)}))} \\ \qquad = \sqrt{(2k')}.\sqrt{(\gamma^2-1)} = \sqrt{(2k')}.\sqrt[4]{(\gamma^2-1)}. \end{cases}$

4. $y = \sqrt{\left(\frac{k}{mm'}\right)}.u.$

Vertauscht man die beiden quadratischen Formen $a+2bx+cx^2$ und $a'+2b'x+c'x^2$ mit einander, also a mit a', b mit b', c mit c', folglich auch m mit m', so bleibt γ und folglich auch k' ungeändert, aber u wird, den Formeln (2.) gemäfs, dadurch mit $K-u$ vertauscht.

Man findet eigentlich $\partial y = \pm\sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}.\partial u$, und wir haben $\partial y = +\sqrt{\frac{k'}{mm'}}$ geschrieben, unter der Voraussetzung, dafs beim Wachsen von u auch y und x wächst. Es lassen sich in der That diese Bedingungen mit einander vereinigen. Da $\frac{m}{m'k'}.\text{dnc}^2 u = \frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}$ von $u=0$ an wachsen soll, so mufs das Differenzial-Verhältnifs $\frac{\partial z}{\partial x}$ positiv sein, wenn wir $z = \frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}$ setzen; wir finden aber

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(a'+2b'x+c'x^2)(b+cx)-(a+2bx+cx^2)(b'+c'x)}{(a'+2b'x+c'x^2)^2}$$
$$= \frac{ba'-ab'+(ca'-ac')x+(cb'-bc')x^2}{(a'+2b'x+c'x^2)^2};$$

und soll dieser Bruch positiv sein, so mufs

$$ba'-ab'+(ca'-ac')x+(cb'-bc')x^2$$

positiv sein. Wir werden bald nachher einen einfacheren Ausdruck der Bedingung finden, unter welcher die drei Gröfsen x, y und u gleichzeitig wachsen und abnehmen. Da $\partial u = \sqrt{\left(\frac{mm'}{k'}\right)}.\partial y = \sqrt{\left(\frac{mm'}{k'}\right)}.\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ ist, so erhalten wir

$$\text{dn}\,u.\partial u = \frac{m\partial x}{a+2bx+cx^2} = \frac{mc\partial x}{(cx+b)^2+m^2} = \frac{\partial\left(\frac{cx}{m}\right)}{1+\left(\frac{cx+b}{m}\right)^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$5. \quad \text{am}\,u = \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right)+\alpha,$$

wenn man durch α die Constante der Integration bezeichnet. Setzt man ferner A gleich dem Werthe von x, für welchen $u=0$, und B gleich dem

Werthe von x, für welchen $u = K$ ist, so haben wir die Formeln

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{cA+b}{m} \quad \text{und} \quad \cot\alpha = \frac{cB+b}{m},$$

woraus rückwärts folgt:

$$6. \quad A = \frac{-b-m\operatorname{tang}\alpha}{c}, \quad B = \frac{-b+m\cot\alpha}{c}.$$

Hieraus leiten wir $B-A = \frac{m}{c}(\cot\alpha + \operatorname{tang}\alpha)$ ab, oder auch

$$7. \quad B-A = \frac{2m}{c\sin 2\alpha}.$$

Hiernach wächst also x wirklich, wenn α positiv und $< \frac{1}{2}\pi$ ist, oder zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist, und wird B sogar unendlich, und $A = -\frac{b}{c}$, wenn $\alpha = 0$ ist.

Multiplicirt man die Formel für dnc$u$ mit ∂u, so erhält man

$$\operatorname{dnc}u.\partial u = \frac{m'\partial x}{a'+2b'x+c'x^2} = \frac{m'c'\partial x}{(c'x+b)^2+m'^2},$$

also

$$8. \quad \operatorname{amc}u = \alpha' - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{c'x+b'}{m'}\right),$$

wo α' ebenfalls eine Constante der Integration bezeichnet. Hieraus folgt, wenn man $u = 0$ und $u = K$ setzt,

$$\cot\alpha' = -\frac{c'A+b'}{m'} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{c'B+b'}{m'},$$

also

$$9. \quad A = \frac{-b'-m'\cot\alpha'}{c'} \quad \text{und} \quad B = \frac{-b'+m'\operatorname{tang}\alpha'}{c'},$$

woraus wir noch durch Subtraction herleiten:

$$B-A = \frac{m'}{c'}(\cot\alpha' + \operatorname{tang}\alpha'),$$

oder

$$10. \quad B-A = \frac{2m'}{c'.\sin 2\alpha'}.$$

Die Vergleichung der beiden Formeln für $B-A$ giebt noch die Proportion

$$\frac{m'}{m} = \frac{c'.\sin 2\alpha'}{c.\sin 2\alpha}.$$

§. 231.

Um die beiden Constanten α und α' in den Formeln (5.) und (8.) zu ermitteln, d. h. durch die gegebenen Constanten auszudrücken und noch

andern Relationen zu finden, schlagen wir einen besonderen Weg ein. Es ist $\operatorname{tn}^2 u = \frac{1-\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u - k'^2}$. Substituiren wir hierin den Werth

$$\operatorname{dn}^2 u = \frac{mk'}{m'}\cdot\frac{a'+2b'x+c'x^2}{a+2bx+cx^2},$$

so erhalten wir

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{1}{k'}\cdot\frac{m'(a+2bx+cx^2)-mk'(a'+2b'x+c'x^2)}{m(a'+2b'x+c'x^2)-m'k'(a+2bx+cx^2)},$$ oder, anders geordnet,

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{(m'a-mk'a')+2(m'b-mk'b')x+(m'c-mk'c')x^2}{k'(ma'-m'k'a)+2k'(mb'-m'k'b)x+k'(mc'-m'k'c)x^2}.$$

Nimmt man aber in der Gleichung (5.) §. 230. auf beiden Seiten die cyklischen Tangenten, so erhält man

$$\operatorname{tn} u = \frac{cx+b+m\operatorname{tang}\alpha}{m-(cx+b)\operatorname{tang}\alpha} = \frac{(b+m\operatorname{tang}\alpha)+cx}{(m-b\operatorname{tang}\alpha)-cx\operatorname{tang}\alpha},$$ also

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{(b+m\operatorname{tang}\alpha)^2+2c(b+m\operatorname{tang}\alpha)x+c^2x^2}{(m-b\operatorname{tang}\alpha)^2-2c\operatorname{tang}\alpha(m-b\operatorname{tang}\alpha)x+c^2\operatorname{tang}^2\alpha.x^2}.$$

Dividirt man den Zähler und Nenner des ersten Bruches durch $m'c-mk'c'$ und den Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch c^2, damit x^2 in den Zählern beider Brüche Eins zum Coëfficienten habe, so müssen die beiden Ausdrücke für $\operatorname{tn}^2 u$ identisch sein; daher haben wir die Gleichungen

$$\left(\frac{b+m\operatorname{tang}\alpha}{c}\right)^2 = \frac{m'a-mk'a'}{m'c-mk'c'},$$

$$\frac{b+m\operatorname{tang}\alpha}{c} = \frac{m'b-mk'b'}{m'c-mk'c'},$$

$$\left(\frac{m-b\operatorname{tang}\alpha}{c}\right)^2 = \frac{k'(ma'-m'k'a)}{m'c-mk'c'},$$

$$-\operatorname{tang}\alpha\frac{(m-b\operatorname{tang}\alpha)}{c} = \frac{k'(mb'-mk'b')}{m'c-mk'c'},$$

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{k'(mc'-m'k'c)}{m'c-mk'c'}.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, und die vierte durch die fünfte, ferner die dritte durch die vierte, so erhält man, ohne alle Zweideutigkeit,

$$1.\quad A = \frac{-b-m\operatorname{tang}\alpha}{c} = -\frac{m'k-mk'b'}{m'c-mk'c'} = -\frac{m'a-mk'a'}{m'b-mk'b'},$$

$$2.\quad B = \frac{-b+m\cot\alpha}{c} = -\frac{mb'-m'k'b}{mc'-m'k'c} = -\frac{ma'-m'k'a}{mb'-m'k'b},$$

und es sind also schon A und B auf zwei verschiedene Arten durch a, b, c, a', b', c' und den conjugirten Modul k' ausgedrückt worden. Iden-

tificirt man die beiden Ausdrücke für A und auch die beiden für B, so erhält man die Gleichungen

$$(m'b-mk'b')^2 = (m'a-mk'a')(m'c-mk'c'),$$
$$(mb'-m'k'b)^2 = (ma'-m'k'a)(mc'-m'k'c);$$

entwickelt man dieselben, so reducirt sich eine jede auf

$$k'^2-2\gamma.k'+1 = 0,$$

woraus, wie oben, folgt:

$$k' = \gamma-\sqrt{(\gamma^2-1)}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht mehr schwer, die Tangenten der Constanten α und α' in den Formeln (5.) und (8.) §. 230. ebenfalls durch die gegebenen Constanten auszudrücken. Die Formel $\tang^2\alpha = \frac{k(mc'-m'k'c)}{m'c-mk'c'}$ übergehen wir, weil sie eine Zweideutigkeit mit sich bringt. Da $m\tang\alpha = -cA-b$ ist, so finden wir, als einfachste Ausdrücke:

$$3.\quad \tang\alpha = \frac{k'(bc'-cb')}{m'c-mk'c'} = \frac{mc'-m'k'c}{bc'-cb'},$$

$$4.\quad \cot\alpha' = \frac{bc'-cb'}{m'c-mk'c'} = \frac{mc'-m'k'c}{k'(bc'-cb')},$$

woraus auf der Stelle die einfache Relation

$$5.\quad \tang\alpha.\tang\alpha' = k'$$

folgt. Da ferner

$$\cot\alpha+\tang\alpha = \frac{\frac{m'c}{k'}-mc'+mc'-m'k'c}{bc'-cb'} = \frac{m'ck^2}{k'(bc'-cb')} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \text{ und}$$

$$\cot\alpha'+\tang\alpha' = \frac{\frac{mc'}{k'}-m'c+m'c-mk'c'}{bc'-cb'} = \frac{mc'k^2}{k'(bc'-cb')} = \frac{2}{\sin 2\alpha'}$$

ist, so erhält man

$$6.\quad B-A = \frac{mm'k^2}{k'(bc'-cb')}.$$

Da nun x von A bis B wachsen soll, während u von Null bis K wächst, so mufs die Differenz $B-A$ positiv sein, und da $\frac{mm'k^2}{k'}$ positiv ist, so mufs

$$bc'-cb' \text{ positiv sein.}$$

Findet sich die Differenz $bc'-cb'$ negativ, so wird x abnehmen, wenn u zunimmt; und umgekehrt. Man kann aber immer bewirken, dafs diese Differenz positiv ist, indem man nur a mit a', b mit b', c mit c', und m mit m' vertauscht.

Kehren wir die Gleichungen (5.) und (8.) um, so ist

$$\operatorname{tang}(\operatorname{am} u - \alpha) = \frac{cx+b}{m} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}(\alpha' - \operatorname{amc} u) = \frac{c'x+b'}{m'}, \text{ also}$$

$$x = -\frac{b}{c} + \frac{m}{c} \cdot \frac{\operatorname{tn} u - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tn} u},$$

$$x = -\frac{b'}{c'} + \frac{m'}{c'} \cdot \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tnc} u}{1 + \operatorname{tang}\alpha' . \operatorname{tnc} u},$$

oder

$$x = \frac{\frac{-b - m\operatorname{tang}\alpha}{c} + \left(\frac{m - b\operatorname{tang}\alpha}{c}\right)\operatorname{tn} u}{1 + \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tn} u}.$$

Werden die Werthe $\frac{-b-m\operatorname{tang}\alpha}{c} = \frac{bb' - ac' + mm'k'}{bc' - cb'}$, $\frac{m - b\operatorname{tang}\alpha}{c} = \frac{m'k'b - mb'}{bc' - cb'}$ und $\operatorname{tang}\alpha = \frac{mc' - m'k'c}{bc' - cb'}$ substituirt, so erhält man endlich

$$7. \quad x = \frac{bb' - ac' + mm'k' + (m'k'b - mb')\operatorname{tn} u}{bc' - cb' + (mc' - m'k'c)\operatorname{tn} u} = \frac{A + B\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tn} u}{1 + \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tn} u}.$$

Aus der Formel $\gamma = \frac{ac' + ca' - 2bb'}{2\sqrt{(ac - b^2)}\sqrt{(ac' - b'^2)}}$ §. 230. leiten wir noch her:

$$\sqrt{(\gamma^2 - 1)} = \frac{\sqrt{[(ac' - ca')^2 - 4(bc' - cb')(ab' - a'b')]}}{2\sqrt{(ac - b^2)}\sqrt{(a'c' - b'^2)}}; \text{ daher ist}$$

$$8. \quad k' = \frac{ac' + ca' - 2bb' - \sqrt{((ac' - ca')^2 - 4(bc' - cb')(ab' - ba'))}}{2\sqrt{(ac - b^2)} . \sqrt{(a'c' - b'^2)}}.$$

Setzt man $\gamma = \frac{1}{\sin 2\theta}$, also

$$\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{(ac - b^2)}\sqrt{(a'c' - b'^2)}}{ac' + ca' - 2bb'}, \text{ so hat man}$$

$$k' = \operatorname{tang}\theta \quad \text{und} \quad k = \frac{\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\cos\theta}.$$

§. 232.

Zweites Verfahren der Integration.

Ist einmal die Form des Werthes von x bei der Integration von $\int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ bekannt, unter der Voraussetzung, dafs $R = (a + 2bx + cx^2)(a' + 2b'x + c'x^2)$ ein Product von vier imaginären Factoren des ersten Grades ist, so kann die Integration leicht noch auf die folgende Art vorgenommen werden. Es sei

$$x = \frac{p + qrt}{1 + rt}, \quad \text{also} \quad \partial x = \frac{(q - p) r \partial t}{(1 + rt)^2};$$

dann ist, wenn wir zur Abkürzung

$$L = a+2bp+cp^2; \qquad L' = a'+2b'p+c'p^2,$$
$$M = a+bq+bp+cpq; \quad M' = a'+b'q+b'p+c'pq,$$
$$N = a+2bq+cq^2; \qquad N' = a'+2b'q+c'q^2,$$
$$m^2 = ac-b^2, \qquad m'^2 = a'c'-b'^2 \text{ setzen,}$$

$$a+2bx+cx^2 = \frac{L+2Mrt+Nr^2t^2}{(1+rt)^2} \text{ und } a'+2b'x+c'x^2 = \frac{L'+2M'rt+N'r^2t^2}{(1+rt)^2},$$

also

$$\partial y = \frac{(q-p)r\,\partial t}{\sqrt{(L+2Mrt+Nr^2t^2)}\sqrt{(L'+2M'rt+N'r^2t^2)}};$$

aufserdem ist bekannt, dafs L, N, L' und N' positive Gröfsen sind. Setzt man nun

$$\frac{Nr^2}{L} = 1, \quad \frac{N'r^2}{L'} = k'^2, \quad M = 0 \quad \text{und} \quad M' = 0,$$

so reducirt sich der Ausdruck auf

$$y = \frac{(q-p)r}{\sqrt{(LL')}} \cdot \int \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k'^2t^2)}},$$

und es ist also $y = \frac{(q-p)r}{\sqrt{(LL')}}\,u$, wenn $x = \frac{p+qr\,\text{tn}\,u}{1+r\,\text{tn}\,u}$, oder $t = \text{tn}\,u$ gesetzt wird.

Die vier vorhergehenden Gleichungen dienen nun zur Bestimmung von p, q, r und k'. Man findet durch wirkliche Entwicklung

$$LN-M^2 = m^2(q-p)^2 \quad \text{und} \quad L'N'-M'^2 = m'^2(q-p)^2,$$

und da $M = M' = 0$ sein soll, so hat man einfacher

$$LN = m^2(q-p)^2 \quad \text{und} \quad L'N' = m'^2(q-p)^2. \text{ Da ferner}$$
$$\frac{Nr^2}{L} = 1 \qquad \text{und} \quad \frac{N'r^2}{L'} = k'^2$$

sein soll, so hat man $N^2r^2 = m^2(q-p)^2$, $L^2 = r^2m^2(q-p)^2$, $N'^2r^2 = k'^2m'^2(q-p)^2$ und $L'^2 = \frac{r^2}{k'^2}m'^2(q-p)^2$, also

$$Nr = m(q-p), \quad L = rm(q-p), \quad N'r = k'm(q-p), \quad L' = \frac{rm'}{k'}(q-p).$$

Hieraus folgt $LL' = \frac{r^2mm'(q-p)^2}{k'}$, also $\frac{1}{\sqrt{(LL')}} = \sqrt{\frac{k'}{mm'}} \cdot \frac{1}{r(q-p)}$, und also

$$y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)} \cdot u,$$

wie schon oben gefunden wurde. Ferner haben wir

$$L = L-M = b(p-q)+cp(p-q) = (b+cp)(p-q),$$
$$N = N-M = b(q-p)+cq(q-p) = (b+cq)(q-p),$$
$$L' = L'-M' = b'(p-q)+c'p(p-q) = (b'+c'p)(p-q),$$
$$N' = N'-M' = b'(q-p)+c'q(q-p) = (b'+c'q)(q-p),$$

und werden diese Gleichungen mit den vorigen verbunden, so erhält man

$$rm = -(b+cp) \quad \text{und} \quad \frac{rm'}{k'} = -(b'+c'p),$$

$$m = r(b+cq) \quad - \quad k'm' = r(b'+c'q),$$

oder

$$r = -\frac{b+cp}{m} = \frac{m}{b+cq}, \quad \frac{k'}{r} = -\frac{m'}{b'+c'p} = \frac{b'+c'q}{m'}.$$

Die Gleichungen $M=0$ und $M'=0$ geben

$$a+b(q+p)+cpq = 0, \quad a'+b'(q+p)+c'pq = 0,$$

und hieraus folgt

$$q+p = \frac{ca'-ac'}{bc'-cb'} \quad \text{und} \quad pq = \frac{ab'-ba'}{bc'-cb'}.$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung von p und q, während die beiden vorigen Gleichungen zur Bestimmung von r und k dienen.

Ehe wir nun die Formeln für p und q selbst herleiten, beachten wir, dafs, dem Ausdrucke

$$x = \frac{p+qr\,\mathrm{tn}\,u}{1+r.\mathrm{tn}\,u}$$

gemäfs, für $u=0$, $x=p$ und für $u=K$, $x=q$ ist und also p und q dieselben Gröfsen sind, welche früher mit A und B bezeichnet wurden. Betrachten wir nun $bc'-cb'$ als positiv, so haben wir

$$q-p = \frac{\sqrt{[(ac'-ca')^2-4(ab'-ba')(bc'-cb')]}}{bc'-cb'} \text{ oder auch}$$

$$q-p = \frac{\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{bc'-cb'} \text{ und also}$$

$$q = \frac{ca'-ac'+\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{2(bc-cb')},$$

$$p = \frac{ca'-ac'-\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{2(bc'-cb')}.$$

Ferner ist $r = \frac{-b-cp}{m}$ und $\frac{1}{r} = \frac{b+cq}{m}$; also ist

$$r+\frac{1}{r} = \frac{c(q-p)}{m}, \quad \text{oder} \quad r^2 = \frac{c(q-p)}{m}.r+1 = 0.$$

Setzen wir also $r = \mathrm{tang}\,\alpha$, wie früher, so haben wir $\frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{c(q-p)}{m}$, also

$$\sin 2\alpha = \frac{2m}{c(q-p)}.$$

Eben so findet man $\frac{1}{r} - r = \frac{2b+c(p+q)}{m}$, oder auch

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{2m}(2b+c(p+q)).$$

Weiter ist $k' = -\frac{(b+cp)(b'+c'q)}{mm'}$ und $\frac{1}{k'} = -\frac{(b'+c'p)(b+cq)}{mm'}$, also ist

$$k'+\frac{1}{k'} = -\frac{[2bb'+(bc'+cb')(p+q)+cc'pq]}{mm'},$$

und werden hierin für $p+q$ und pq die vorhin gefundenen Werthe substituirt, so erhält man

$$(bc'+cb')(p+q)+2cc'pq = \frac{(bc'+cb')(ca'-ac')+2cc'(ab'-ba')}{bc'-cb'} = -ac'-ca',$$

und es ist also

$$k'+\frac{1}{k'} = \frac{ac'+ca'-2bb'}{mm'} \quad \text{oder} \quad k'^2 - \frac{ac'+ca'-2bb'}{mm'}k'+1 = 0$$

wie früher die zur Bestimmung von k' und also auch von k selbst dienende quadratische Gleichung, woraus, wenn man

$$\gamma = \frac{ac'+ca'-2bb'}{2mm'} \text{ setzt, } k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)} \text{ folgt.}$$

Somit sind alle in den Formeln $x = \frac{p+qr\,\mathrm{tn}\,u}{1+r\,\mathrm{tn}\,u}$ und $y = \sqrt{\frac{k'}{mm'}}.u$ vorkommende Constanten bestimmt worden.

Aus der Formel $x = \frac{p+qr\,\mathrm{tn}\,u}{1+r\,\mathrm{tn}\,u}$ folgt durch Umkehrung $\mathrm{tn}\,u = \frac{x-p}{r(q-x)}$, und werden hierin die aus den Gleichungen $rm = -(b+cp)$ und $m = r(b+cp)$ gezogenen Werthe

$$p = -\frac{rm+b}{c} \quad \text{und} \quad q = \frac{m-rb}{cr}$$

substituirt, so erhält man $\mathrm{tn}\,u = \frac{cx+b+rm}{m-rb-crx} = \frac{r+\frac{cx+b}{m}}{1-r.\left(\frac{cx+b}{m}\right)}$ oder

$$\mathrm{am}\,u = \text{arc tang}(r) + \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right), \text{ oder auch}$$

$$\mathrm{am}\,u = \alpha + \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right).$$

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man

$$\mathrm{dn}\,u, \partial u = \frac{mc\,\partial x}{m^2+b^2+2bcx+c^2x^2} = \frac{m\partial x}{a+2bx+cx^2},$$

und weil $\sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}u = y$, also

$$\sqrt{\left(\frac{k}{mm'}\right)}\partial u = \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}$$

ist, so erhält man durch die Division, wie vorhin

$$\mathrm{dn}\,u = \sqrt{\left(\frac{mk'}{m'}\right)}.\sqrt{\frac{a'+2b'x+c'x^2}{a+2bx+cx^2}}.$$

Das hier gefundene Integral ist

$$y = \int_p \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}};$$

das Integral $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}.\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}$ ist also $= \sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}.(u-u')$, wenn man u' nach der Formel $\operatorname{tn} u' = -\frac{p}{q.r}$ oder $\operatorname{dn} u' = \sqrt{\left(\frac{m a' k'}{m a'}\right)}$ bestimmt. Für $x = \frac{1}{b}$ ist $\operatorname{tn} u = \frac{-1}{r}$, also $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ und $\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{m c' k'}{m' c}}$, und für $x = \frac{p+q}{2}$ ist $\operatorname{tn} u = \frac{1}{r}$, also $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\pi - \alpha$.

§. 233.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R zwei reelle und zwei imaginäre Factoren hat, welche Formen des ersten Grades in Ansehung von x sind.

Hat die Gleichung $R = 0$ vier Wurzeln, und sind zwei derselben $x = p$ und $x = q$ reell, und zwei imaginär, so mag $a + 2bx + cx^2$ die quadratische Form sein, welche, $= 0$ gesetzt, die beiden imaginären Wurzeln giebt. Wir sehen wieder a und mithin auch c als positiv an und setzen auch wieder

$$m^2 = ac - b^2,$$

indem diese Gröfse positiv ist. Unter der Voraussetzung, dafs a positiv sei, ist der Ausdruck $a + 2bx + cx^2$ immer positiv, welcher reelle Werth auch für x genommen werden mag; daher sind namentlich die Ausdrücke $a + 2bp + cp^2$ und $a + 2bq + cq^2$ positiv. Wir setzen also

$$n^2 = a + 2bp + cp^2 \quad \text{und} \quad n'^2 = a + 2bq + cq^2.$$

Wenn die Wurzeln p und q sich gleich wären, so würde man das Integral in Anwendung der Potenzial-Functionen finden; daher sehen wir die beiden Wurzeln als verschieden an, und zwar sei wieder

$$q > p, \quad \text{oder} \quad q - p \text{ positiv.}$$

Bei der Integration müssen drei Fälle unterschieden werden, jenachdem x entweder kleiner als die kleinste Wurzel p sein soll, oder zwischen den Grenzen p und q enthalten ist, oder gröfser als die gröfste Wurzel q sein soll. Wir behandeln den mittleren Fall zuerst.

I. Ist x zwischen den Grenzen p und q enthalten, so sind die Differenzen $x - p$ und $q - x$ positiv, oder mindestens $= 0$, und da $a + 2bx + cx^2$ immer positiv ist, so setzen wir nun

$$R_{,} = (x-p)(q-x)(a+2bx+cx^2)$$

und integriren also eigentlich

$$y = \int_R \frac{\partial x}{\sqrt{R}}.$$

Da $\frac{x-p}{q-x}$ positiv ist, so setzen wir $\frac{x-p}{q-x} = v^2$. Dann ist rückwärts

$$x = \frac{p+qv^2}{1+v^2}, \quad \text{also} \quad \partial x = \frac{2(q-p)v\partial v}{(1+v^2)^2}, \quad \text{ferner}$$

$$x-p = \frac{(q-p)v^2}{1+v^2}, \quad q-x = \frac{q-p}{1+v^2}, \quad \sqrt{((x-p)(q-x))} = \frac{(q-p)v}{1+v^2};$$

auch findet man

$$a+2bx+cx^2 = \frac{n^2+2(a+b(p+q)+cpq)v^2+n'^2.v^4}{(1+v^2)^2}.$$

Setzen wir also noch zur Abkürzung

$$a+b(p+q)+c.pq = nn'.\gamma,$$

so haben wir schon die Umformung

$$y = \int_0 \frac{2\partial v}{\sqrt{(n^2+2nn'\gamma.v^2+n'^2.v^4)}}.$$

Durch eine leichte Entwicklung findet sich $n^2.n'^2-(nn'\gamma)^2 = m^2(q-p)^2$, oder

$$\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{m(q-p)}{nn'},$$

woraus ersichtlich ist, dafs $\gamma^2 < 1$ ist und die weitere Integration also unmittelbar nach §. 223. ausgeführt werden kann. Setzen wir also

$$k = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad \text{so ist}$$

$$v = \sqrt{\frac{x-p}{q-x}} = \sqrt{\frac{n}{n'}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}\,\text{am}\,u,$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}}.$$

Setzt man nun $\gamma = \cos 2\theta$, also

$$\cos 2\theta = \frac{a+b(p+q)+cpq}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\sin 2\theta = \frac{m(q-p)}{\sqrt{(a^2+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{m(q-p)}{a+b(p+q)+cpq},$$

so hat man

$$k = \sin\theta \quad \text{und} \quad k' = \cos\theta.$$

Aus der Formel $\text{tang}\tfrac{1}{2}\,\text{am}\,u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n}.\frac{x-p}{q-x}\right)}$ folgt rückwärts

$$x = \frac{nq(1-\text{cn}\,u)+n'p(1+\text{cn}\,u)}{n(1-\text{cn}\,u)+n'(1+\text{cn}\,u)} = \frac{nq+n'p+(n'p-nq)\,\text{cn}\,u}{n'+n+(n'-n)\,\text{cn}\,u}.$$

Für $u=0$ ist $x=p$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\frac{nq+n'p}{n+n'}$ und $y=\frac{K}{\sqrt{(nn')}}$; für $u=2K$ ist $x=q$ und $y=\frac{2K}{\sqrt{(nn')}}$.

Man findet leicht

$$\operatorname{cn} u = \frac{n(q-x)-n'(x-p)}{n(q-x)+n'(x-p)}, \quad \text{also} \quad \operatorname{sn} u = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((q-x)(x-p))}}{n(q-x)+n'(x-p)}.$$

Differenziirt man die erste von diesen Formeln, so erhält man

$$\operatorname{sn} u.\operatorname{dn} u\,\partial u = \frac{2nn'(q-p)\,\partial x}{(n(q-x)+n'(x-q))^2},$$

und da $\partial u = \frac{\sqrt{(nn')}.\partial x}{\sqrt{R}}$ ist,

$$\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u = \frac{2\sqrt{(nn')}.(q-p).\sqrt{R}}{(n(q-x)+n'(x-p))^2}, \text{ also}$$

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{2\sqrt{(nn')}}{q-p}.\frac{(q-x)(x-p)}{\sqrt{R}}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{cnc} u = \frac{2k'\sqrt{(nn')}}{q-p}.\sqrt{\frac{(q-x)(x-p)}{a+2bx+cx^2}}.$$

Es kann dieser Ausdruck noch etwas einfacher dargestellt werden. Es ist $\frac{2k'.\sqrt{(nn')}}{q-p}=\sqrt{\frac{4\cos^2\theta.nn'}{(q-p)^2}}$, und da $nn'=\frac{m(q-p)}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}=\frac{m(q-p)}{2\sin\theta\cos\theta}$ ist, so hat man $\frac{2k'\sqrt{(nn')}}{q-p}=\sqrt{\frac{2\cot\theta.m}{q-p}}$, und also

$$\operatorname{cnc} u = \sqrt{\frac{2mk'}{(q-p)k}}.\sqrt{\frac{(x-p)(q-x)}{a+2bx+cx^2}}.$$

Zu derselben Formel gelangt man unmittelbar, wenn man das Integral $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ auf ähnliche Art behandelt, wie in §. 229. und 230. gezeigt worden ist; an der Stelle der dortigen Function $\operatorname{dnc} u$ haben wir jetzt die Function $\operatorname{cnc} u$. Aus den vorigen Formeln folgt auch noch

$$\operatorname{dn} u = \frac{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n(q-x)+n'(x-p)} \quad \text{und} \quad \operatorname{snc} u = \frac{n(q-x)-n'(x-p)}{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}.$$

Soll in den früheren Formeln x abnehmen, wenn u wächst, und umgekehrt, so hat man nur durchgängig $2K-u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ statt $\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ zu setzen.

§. 234.

II. Ist die veränderliche Gröfse x kleiner als die kleinste reelle Wurzel p der Gleichung $R=0$, so ist die Differenz $p-x$ und um so mehr also $q-x$ positiv. Wir setzen nun

$$R=(p-x)(q-x).(a+2bx+cx^2),$$

und wieder $m^2 = ac - b^2$, sehen auch wieder a und mithin auch c als positiv an. Zu integriren ist nun

$$\gamma = \int_p \frac{-\partial x}{\sqrt{R}},$$

wenn γ für $x = p$ gleich Null sein und wachsen soll, während x von p an fortwährend abnimmt. Man erhält die auf diesen Fall sich beziehenden Formeln unmittelbar, wenn man in den Formeln des §. 233. $-R$ statt R, also $i\sqrt{R}$ statt $\sqrt{R}$, ui statt u setzt und aufserdem k mit k' vertauscht, wodurch $\cos 2\theta$ oder γ sich mit $-\cos 2\theta$ oder $-\gamma$ vertauscht. Setzt man also

$$\cos 2\theta = -\frac{a+b(p+q)+cpq}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}} = -\gamma,$$

$$\sin 2\theta = \frac{m(q-p)}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}} = \sqrt{(1-\gamma^2)},$$

$$\tan 2\theta = -\frac{m(q-p)}{a+b(p+q)+cpq} = -\frac{\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma},$$

$$k = \sin\theta \quad \text{und} \quad k' = \cos\theta,$$

so erhält man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n} \cdot \frac{p-x}{q-x}\right)},$$

$$x = \frac{n'p(1+\operatorname{cn} u) - nq(1-\operatorname{cn} u)}{n'(1+\operatorname{cn} u) - n(1-\operatorname{cn} u)} = \frac{n'p - nq + (n'p+nq)\operatorname{cn} u}{n' - n + (n'+n)\operatorname{cn} u},$$

$$\gamma = \frac{u}{\sqrt{(nn')}},$$

wenn wieder gesetzt wird $n^2 = a + 2bp + cp^2$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2$,

$$\gamma = \frac{a+b(p+q)+cpq}{nn'} \quad \text{und} \quad \sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{m(q-p)}{nn'}.$$

Nimmt man x unendlich grofs und negativ, so wird $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n'}{n}} > 1$ und $< \frac{1}{k}$; daher ist nun u immer zwischen den Grenzen 0 und K enthalten.

III. Ist die veränderliche Gröfse x gröfser als die gröfste reelle Wurzel q der biquadratischen Gleichung $R = 0$, so ist $x - q$ positiv und also um so mehr $x - p$. Wir setzen nun

$$R = (x-q)(x-p)(a+2bx+cx^2),$$

und suchen also das Integral $\gamma = \int_q \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$. Die Formeln sind denen in No. II. ähnlich; man hat in ihnen nur jetzt p mit q, also auch n mit n' zu vertauschen. Setzt man also

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n}{n'} \cdot \frac{x-q}{x-p}},$$

$$x = \frac{nq(1+\operatorname{cn} u) - n'p(1-\operatorname{cn} u)}{n(1+\operatorname{cn} u) - n'(1-\operatorname{cn} u)}, \text{ so ist } y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}}.$$

Für $x = q$ ist nun $u = 0$ und für $x = \frac{1}{0}$ ist $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n}{n'}}$.

Zusatz. Die Formel $\operatorname{dn} u$ in No. II. ist

$$\operatorname{dn} u = \frac{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n(q-x)+n'(p-x)}:$$

in No. III. ist sie also

$$\operatorname{dn} u = \frac{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n'(x-p)+n(x-q)}.$$

§. 235.

Von den Integralen $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}}$ und $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$.

Es ist zunächst $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = x^4 + 1$; setzen wir aber in den Formeln §. 232. $a = 1$, $2b = \sqrt{2}$, also $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = 1$, $a' = 1$, $b' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c' = 1$; folglich $m^2 = 1 - \frac{1}{2} = m'^2$, oder $m = m' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $p + q = 0$, $pq = -1$, also $p = -1$ und $q = 1$, $q - p = 2$, $r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 = 0$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $2\alpha = \frac{1}{4}\pi$, folglich $r = \operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} \frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$ (oder $r = \sqrt{2} \pm 1$), $\gamma = \frac{2+1}{2mm'} = 3$, also $\sqrt{(\gamma^2 - 1)} = 2\sqrt{2}$, folglich $k' = 3 - 2\sqrt{2}$, also $k = 2\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)}$. Es ist also

$$1. \begin{cases} x = \dfrac{-1 + \operatorname{tang} \frac{1}{8}\pi . \operatorname{tn} u}{+1 + \operatorname{tang} \frac{1}{8}\pi . \operatorname{tn} u}, \text{ oder} \\ \operatorname{am} u = \frac{1}{8}\pi + \operatorname{arc tang}(1 + x\sqrt{2}) \text{ und } \operatorname{dn} u = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})} . \sqrt{\dfrac{1 - x\sqrt{2} + x^2}{1 + x\sqrt{2} + x^2}}; \\ \displaystyle\int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}} = u . \sqrt{(6 - 4\sqrt{2})}. \end{cases}$$

Hieraus folgt noch $\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}} = (u - u') . \sqrt{(6 - 4\sqrt{2})}$, wenn das Argument u' durch die Formel $\operatorname{am} u' = \frac{3}{8}\pi$ bestimmt wird, in welcher der Modul ebenfalls $k = 2\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)}$ ist.

Da $\sqrt{(1 - x^4)} = \sqrt{(1 - x^2)}\sqrt{(1 + x^2)}$ ist, so integriren wir $\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ nach §. 234. Es ist $p = -1$, $q = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $q - p = 2$, $m = 1$, $p + q = 0$, $pq = -1$, also

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2}{1-1} = \frac{1}{0}, \text{ also } \theta = \tfrac{1}{4}\pi, \text{ folglich}$$
$$k = \sin\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ferner ist $n = \sqrt{2} = n'$, also $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u = \frac{1+x}{1-x}$, $x = -\operatorname{cn} u$ und

$$\int_{-1}\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}u, \text{ also } \int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}(u-K).$$

Man kann diese Integrale noch einfacher darstellen. Setzt man $-x$ für x, so hat man

$$\text{2.} \quad x = \operatorname{cn} u, \quad \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\tfrac{1}{2}\partial u, \quad \text{also} \quad \int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}(K-u),$$

und der Modular-Quadrant für den Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$ ist

$$K = 1{,}85407\ 46773\ 01\ldots \text{ nach } \textit{Legendre}.$$

§. 236.

Die Integration von $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ nur eine Gleichung des dritten Grades mit zwei imaginären und einer reellen Wurzel ist.

Ist R nur eine cubische Gleichung mit zwei imaginären Wurzeln, und hat diese Gleichung also eine reelle Wurzel, so können wir die Integration unter die beiden in §. 234. vorgenommenen Integrationen subsumiren, indem wir uns vorstellen, dafs entweder q positiv und $= \frac{1}{0}$, oder p negativ und $= \frac{1}{0}$ wird.

Im ersten Falle haben wir für ein immer kleiner werdendes x:

$$y = \int_p\frac{-\partial x}{\sqrt{((p-x)(a+2bx+cx^2))}},$$

und setzen wir

$$\cos 2\theta = -\frac{b+cp}{\sqrt{c}.\sqrt{(a+2bp+cp^2)}} = -\gamma,$$
$$\sin 2\theta = \frac{m}{\sqrt{c}.\sqrt{(a+2bp+cp^2)}} = \sqrt{(1-\gamma^2)},$$
$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{m}{b+cp} = -\frac{\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma},$$

so ist wieder

$$k = \sin\theta, \quad k' = \cos\theta, \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n}.(p-x)\right)}, \text{ wenn } n^2 = a+2bp+cp^2 \text{ und}$$
$$n'^2 = c \text{ gesetzt wird,}$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n} = \sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a+2bp+cp^2}}.$$

Im zweiten Falle haben wir zu integriren:

$$y = \int_q \frac{\partial x}{\sqrt{((x-q)(a+2bx+cx^2))}}.$$

Setzen wir

$$\cos 2\theta = \frac{b+cq}{\sqrt{a}.\sqrt{(a+2bq+cq^2)}}, \qquad \sin 2\theta = \frac{m}{\sqrt{a}.\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{m}{b+cq},$$

so ist $k = \sin\theta$ und $k' = \cos\theta$; ferner

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n}{n'}.(x-q)\right)},$$

wenn wir $n^2 = a$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2$,

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a+2bq+cq^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}} \text{ setzen.}$$

Zusatz. Ist zu integriren $y = \int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}}$, also $R = 1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$, so ist $q = -1$, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, also $n = 1$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2 = 3$, also $n' = \sqrt{3}$; ferner $m^2 = 1 - \frac{1}{4}$, also $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{also} \quad 2\theta = \pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{5}{6}\pi \quad \text{und} \quad \theta = \tfrac{5}{12}\pi = 75^0,$$

$$k = \sin \tfrac{5}{12}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.\sqrt{(1+x)},$$

$$y = \int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}} = \frac{u}{\sqrt[4]{3}}.$$

Aus dem gefundenen Resultate folgt $\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}} = \frac{u-u'}{\sqrt[4]{3}}$, wenn $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u' = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ gesetzt wird.

Setzt man $-x$ statt x, so hat man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{und} \quad \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{u'-u}{\sqrt[4]{3}}.$$

Die Formel für u' bleibt dieselbe; wie auch der Modul $k = \sin \frac{5}{12}\pi$.

§. 237.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ eine biquadratische Gleichung mit vier reellen Wurzeln oder $R = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist.

Soll $\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \partial y$ integrirt werden und hat die Gleichung $R = 0$ vier reelle Wurzeln, die wir durch a, b, c, d vorstellen, und die so geordnet sein

mögen, dafs $a < b < c < d$ sei, und also die Differenzen $b-a$, $c-b$, $d-c$, oder auch $d-c$, $d-b$, $d-a$ sämmtlich positiv sind, so ist entweder $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ oder $R=-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; und im zweiten Falle mufs nothwendig einer von den vier zweigliedrigen Factoren negativ sein, weil $\sqrt{R}$ reell sein mufs.

Ist $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, und wäre x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so wäre die Differenz $x-a$ positiv, die drei anderen Factoren wären negativ, also $\sqrt{R}$ imaginär; ist x zwischen b und c enthalten, so sind $x-a$ und $x-b$ positiv, $x-c$ und $x-d$ aber negativ, also ist dann $\sqrt{R}$ reell und $=\sqrt{((x-a)(x-b)(c-x)(d-x))}$; ist x zwischen c und d enthalten, so sind die drei ersten Factoren positiv, der vierte ist negativ, also $\sqrt{R}$ imaginär; ist endlich x zwischen d und a enthalten, wobei man sich einen Uebergang durch $\pm\frac{1}{0}$ von d nach a vorstellen kann, so sind entweder alle vier Factoren positiv, oder alle vier Factoren sind negativ; daher ist $\sqrt{R}$ dann reell.

Also ist $\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}$ nur dann reell, wenn entweder x zwischen den Grenzen b und c,

oder x zwischen den Grenzen d und a enthalten ist.

Ist $R=-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, so ist $\sqrt{R}$ da reell, wo in früheren Falle $\sqrt{R}$ imaginär war; daher ist $\sqrt{(-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}$ nur dann reell, wenn entweder

x zwischen den Grenzen a und b,

oder x zwischen den Grenzen c und d enthalten ist.

1. Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung, dafs $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ und x zwischen den Grenzen d und a enthalten ist. Da nun $\frac{x-d}{x-a}=\frac{d-x}{a-x}$ ein positiver Bruch ist, welcher mit x zugleich wächst, da $a<b<c<d$ sein soll, so setzen wir

$$\frac{x-d}{x-a}=rv^2.$$

Dann ist rückwärts

$$x=\frac{d-arv^2}{1-rv^2},\quad \text{also}\quad \partial x=\frac{2r(d-a)v\partial v}{(1-rv^2)^2},$$

$$x-a=\frac{d-a}{1-rv^2},\quad x-d=\frac{(d-a)rv^2}{1-rv^2},\quad \text{also}\quad \sqrt{((x-a)(x-d))}=\frac{(d-a)v\sqrt{r}}{1-rv^2},\quad \text{und}$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-d))}}=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{1-rv^2};$$

weiter ist $x-c=\frac{d-c+(c-a)rv^2}{1-rv^2}$ und $x-b=\frac{d-b+(b-a)rv^2}{1-rv^2}$, also haben wir

$$\partial y = \frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(d-c+(c-a)rv^2)}.\sqrt{(d-b+(b-a)rv^2)}}.$$

Da der Unterschied der beiden Brüche $\frac{c-a}{d-c}-\frac{b-a}{d-b}$ positiv und $=\frac{(c-b)(d-a)}{(d-c)(d-b)}$ ist, so setzen wir $\frac{c-a}{d-c}.r=1$, $\frac{b-a}{d-b}.r=k'^2$ und $v=\operatorname{tn} u$ für den Modul k; dann ist

$$y = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{((d-c)(d-b))}}.u,$$

und da $\sqrt{r}=\sqrt{\frac{d-c}{c-a}}$ ist, so ist

$$1.\quad y = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}} = \int_d \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}},$$

$$2.\quad \operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-c)(x-a)}} \quad \text{und}$$

$$3.\quad k' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}, \quad \text{also} \quad k = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}.$$

Da $\operatorname{tnc} u=\frac{1}{k'\operatorname{tn} u}$ ist, so ist

$$4.\quad \operatorname{tnc} u = \sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(x-d)}}.$$

Aus den Formeln für $\operatorname{tn} u$ und $\operatorname{tnc} u$ finden wir nun noch leicht die Formeln

$$5.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}}, & \operatorname{snc} u = \sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(d-a)(x-b)}}, \\ \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{(d-c)(x-a)}{(d-a)(x-c)}}, & \operatorname{cnc} u = \sqrt{\frac{(b-a)(x-d)}{(d-a)(x-b)}}, \\ k\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(c-b)(x-d)}{(d-b)(x-c)}}, & k\operatorname{snc} u = \sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}}, \\ \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{(d-c)(x-b)}{(d-b)(x-c)}}, & \operatorname{dnc} u = \sqrt{\frac{(b-a)(x-c)}{(c-a)(x-b)}}, \end{cases}$$

Aus diesen Formeln lassen sich durch Zusammensetzung andere herleiten. Für $u=0$ ist $x=d$ und $y=0$; für $u=K$ aber ist $x=a$ und $y=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_d^a\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$.

§. 238.

II. Soll $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung gefunden werden, dafs $R = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist und x zwischen den Grenzen b und c liegt, so setzen wir, da nun $\frac{x-b}{c-x}$ ein positiver Bruch ist,

$$\frac{x-b}{c-x} = rv^2;$$

dann ist rückwärts $x = \frac{b+crv^2}{1+rv^2}$, $\partial x = \frac{2(c-b)rv\partial v}{(1+rv^2)^2}$, $x-b = \frac{(c-b)rv^2}{1+rv^2}$, $c-x = \frac{c-b}{1+rv^2}$, $\sqrt{((x-b)(c-x))} = \frac{(c-b)\sqrt{r}.v}{1+rv^2}$, $x-a = \frac{b-a+(c-a)rv^2}{1+rv^2}$ und $d-x = \frac{d-b+(d-c)rv^2}{1+rv^2}$. Setzen wir nun

$$y = \int_b \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(c-x)(d-x))}},$$

so erhalten wir durch Zusammensetzung der vorigen Ausdrücke:

$$\partial y = \frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{((b-a)+(c-a)rv^2)}.\sqrt{(d-b+(d-c)rv^2)}},$$

und da nach §. 237. $\frac{c-a}{d-c} > \frac{b-a}{d-b}$, also auch $\frac{c-a}{b-a} > \frac{d-c}{d-a}$ ist, so setzen wir nun

$$\frac{c-a}{b-a}.r = 1, \quad \frac{d-c}{d-b}.r = k'^2, \quad v = \text{tn}\,u;$$

dann ist zunächst

$$y = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{((b-a)(d-b))}}u, \text{ oder, da } r = \frac{b-a}{c-a} \text{ ist,}$$

$$1. \quad y = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}} = \int_b \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}},$$

$$2. \quad k' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}} \text{ und } k = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},$$

$$3. \quad \text{tn}\,u = \sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(b-a)(c-x)}} \text{ und } \text{tnc}\,u = \sqrt{\frac{(d-b)(c-x)}{(d-c)(x-b)}}.$$

Hieraus folgt

$$4. \quad \begin{cases} \text{sn}\,u = \sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}}; & \text{snc}\,u = \sqrt{\frac{(d-b)(c-x)}{(c-b)(d-x)}}, \\ \text{cn}\,u = \sqrt{\frac{(b-a)(c-x)}{(c-b)(x-a)}}; & \text{cnc}\,u = \sqrt{\frac{(d-c)(x-b)}{(c-b)(d-x)}}, \\ \text{dn}\,u = \sqrt{\frac{(b-a)(d-x)}{(d-b)(x-a)}}; & \text{dnc}\,u = \sqrt{\frac{(d-c)(x-a)}{(c-a)(d-x)}}. \end{cases}$$

Für $u=0$ ist jetzt $x=b$ und $y=0$, und für $u=K$ ist $x=c$ und $y=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$.

§. 239.

Von den coordinirten Werthen von x in den beiden Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$.

Ehe wir weiter gehen, stellen wir einige Betrachtungen über die in §. 237. und §. 238. gefundenen Resultate an. Wir haben gesehen, daſs das Differenzial $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ auf zwei ganz verschiedene Arten in $\frac{2.\partial u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$ umgeformt und demgemäſs auch auf zwei verschiedene Arten integrirt werden kann, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ein Product von vier reellen Factoren ist; die beiden Modul k und k' finden sich in übereinstimmender Gröſse bei beiden Integrationen; beide Integrationen geben die Werthe 0, wenn x den ersten Grenzwerth erhält, und beide Integrale werden $=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$, wenn x den zweiten Grenzwerth erhält; *verschieden sind nur die Werthe von x, welche in den beiden Integrationen zu einem und demselben Argumente u gehören,* und solche zwei zu demselben Argumente u gehörige Werthe von x nennen wir einander *beigeordnete* oder *coordinirte* Werthe; coordinirt sind also die Grenzwerthe $x=d$ und $x=b$, weil beide zu $u=0$ gehören; coordinirt sind ferner die Werthe $x=a$ und $x=c$ in den beiden Integrationen, weil beide zu dem Argumente $u=K$ gehören. Um die übrigen coordinirten Werthe von x kennen zu lernen, habe u in beiden Integrationen denselben Werth, und der dazu gehörige Werth von x in §. 237. werde durch x selbst, der dazu gehörige coordinirte Werth von x in §. 238. aber werde durch x' bezeichnet: dann ist gleichzeitig

$$\operatorname{sn} u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}}=\frac{(c-a)(x'-b)}{(c-b)(x'-a)}.$$

Hieraus folgt rückwärts

$$1.\quad \begin{cases} x=\dfrac{d(c-a)-c(d-a)\operatorname{sn}^2 u}{c-a-\quad(d-a)\operatorname{sn}^2 u}=\dfrac{d(c-a)\operatorname{cn}^2 u-a(d-c)\operatorname{sn}^2 u}{(c-a)\operatorname{cn}^2 u-\quad(d-c)\operatorname{sn}^2 u},\\ x'=\dfrac{b(c-a)-a(c-b)\operatorname{sn}^2 u}{c-a-\quad(c-b)\operatorname{sn}^2 u}=\dfrac{b(c-a)\operatorname{cn}^2 u+c(b-a)\operatorname{sn}^2 u}{(c-a)\operatorname{cn}^2 u+\quad(b-a)\operatorname{sn}^2 u},\end{cases}$$

und hiernach lassen sich für jedes Argument u die beiden zugeordneten Werthe von x berechnen. Für $u=0$ geben sie wirklich $x=d$ und $x'=b$ und für $u=K$ erhalten wir $x=a$ und $x'=c$.

In Hinsicht auf die Verschiedenheit der coordinirten Werthe von x nennen wir die beiden Integrationen des §. 237. und §. 238. selbst coordinirt.

Vertauscht man in den Formeln, welche sich auf die eine Integration von $y=\int\frac{\pm\partial x}{\sqrt{R}}$ *beziehen, a mit c, b mit d und x mit x'* (unter der Voraussetzung, dafs in den Formeln des §. 238. *x in x' wirklich abgeändert worden ist*), *so bleiben die Gröfsen u, y, k und k' ungeändert und man erhält dadurch die sich auf die coordinirte Integration beziehenden Formeln.*

Als Umformungen der Ausdrucke (1.) mögen noch angemerkt werden:

$$2.\quad \begin{cases} x=\dfrac{a(d-c)-c(d-a)\,\mathrm{cn}^2u}{d-c-(d-a)\,\mathrm{cn}^2u}=\dfrac{b(d-c)-c(d-b)\,\mathrm{dn}^2u}{d-c-(d-b)\,\mathrm{dn}^2u},\\[2ex] x'=\dfrac{c(b-a)-a(b-c)\,\mathrm{cn}^2u}{b-a-(b-c)\,\mathrm{cn}^2u}=\dfrac{d(b-a)+a(d-b)\,\mathrm{dn}^2u}{b-a+(d-b)\,\mathrm{dn}^2u}.\end{cases}$$

Diese, wie die früheren Formeln, sind bei der Integration von $\frac{P\partial x}{\sqrt{R}}$ zu benutzen, wenn P eine Function von x vorstellt, welche in den meisten Fällen rational sein wird.

Es lassen sich auch leicht Formeln herleiten, nach welchen man auch die einander zugeordneten Werthe x und x' aus einander berechnen kann, ohne die Modular-Functionen des Argumentes u dabei in Rechnung zu bringen; solche Formeln erhält man, wenn man die Ausdrücke der Modular-Functionen von u im §. 237. mit denen des §. 238., worin aber x in x' abzuändern ist, identificirt. Dadurch erhält man die nachstehenden sechs Gleichungen in der Form von Proportionen.

$$3.\quad \begin{cases} \dfrac{x'-b}{x'-a}=\dfrac{c-b}{d-a}\cdot\dfrac{x-d}{x-c}, & \dfrac{x'-b}{c-x'}=\dfrac{b-a}{d-c}\cdot\dfrac{x-d}{x-a},\\[2ex] \dfrac{c-x'}{x'-a}=\dfrac{(d-c)(c-b)}{(d-a)(b-a)}\cdot\dfrac{x-a}{x-c}, & \dfrac{c-x'}{d-x'}=\dfrac{c-b}{d-a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b},\\[2ex] \dfrac{d-x'}{x'-a}=\dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{x-b}{x-c}, & \dfrac{x'-b}{d-x'}=\dfrac{(b-a)(c-b)}{(d-a)(d-c)}\cdot\dfrac{x-d}{x-b}.\end{cases}$$

Schafft man in diesen Gleichungen die Nenner fort, so lassen sie sich sämmtlich entwickelt also darstellen:

$$4.\quad (d+b-a-c)xx'-(bd-ac)(x+x')+bd(a+c)-ac(d+b)=0,$$

oder auch in einer der folgenden Formen:

$$5.\quad \frac{bd-xx'}{xx'-ac}=\frac{d+b-x-x'}{x+x'-a-c},\quad \frac{xx'-ac}{bd-ac}=\frac{x+x'-a-c}{d+b-a-c},\quad \frac{bd-xx'}{bd-ac}=\frac{d+b-x-x'}{d+b-a-c}.$$

Jede von den Gleichungen (3.), (4.), (5.) drückt also die Bedingung der Coordination der Werthe x und x' aus, d. h. ist eine dieser Gleichungen befriedigt (also auch jede der übrigen), so gehört zu den Werthen x und x' entweder dasselbe Argument u, oder es gehören zu solchen zwei Werthen x und x' zwei Argumente, die sich zu $2K$ ergänzen; denn es wurden diese Gleichungen im Grunde nicht so hergeleitet, dafs man die gleichnamigen Modular-Functionen, sondern ihre Quadrate identificirte, und diese Quadrate bleiben ungeändert, wenn man $2K \pm u$ statt u setzt. Was hier in Beziehung auf $2K$ gesagt worden ist, gilt auch, wenn $2iK'$ statt $2K$ genommen wird.

Anmerkung. Der hier aufgestellte und noch ein zweiter ihm ähnlicher Begriff der coordinirten Werthe x und x' ist von der gröfsten Wichtigkeit in den Anwendungen der Theorie der Modular-Functionen auf die Geometrie und Mechanik; den coordinirten Werthen x und x' entsprechen in der Geometrie nicht selten coordinirte Puncte in zwei von einander getrennten Zweigen einer und derselben Curve, d. h. zu jedem Puncte des einen Zweiges gehört allemal ein mit jenem in einem unveränderlichen Zusammenhange stehender (coordinirter) Punct des andern Zweiges der Curve, deren merkwürdigste Eigenschaften ihr gerade in Ansehung der coordinirten Puncte zukommen, wie weiter unten an einer ausführlich behandelten Curve gezeigt werden soll, welche auch in statischer Hinsicht sehr bemerkenswerth ist. Sieht man eine solche Curve mit zwei Zweigen als durch Einhüllung entstanden an, so gehört zu einer Tangente des einen Zweiges allemal auch eine coordinirte Tangente des anderen Zweiges.

§. 240.

Die beiden Integrationen von $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist

1. Es ist schon in der Einleitung zum §. 237. vorgekommen, dafs, wenn a, b, c, d die vier Wurzeln der Gleichung $R = 0$ sind und x zwischen a und b enthalten ist, unter der Voraussetzung, dafs $a < b < c < d$ ist, das Product $-R$ positiv sei, und alle vier Factoren von

$$-R = (x-a)(b-x)(c-x)(d-x)$$

positiv sind. Setzt man nun

$$\frac{x-a}{b-x} = rv^2,$$

also $x=\frac{a+brv^2}{1+rv^2}$, $x-a=\frac{(b-a)rv^2}{1+rv^2}$, $b-x=\frac{b-a}{1+rv^2}$, $c-x=\frac{c-a+(c-b)rv^2}{1+rv^2}$, $d-x=\frac{d-a+(d-b)rv^2}{1+rv^2}$, $\partial x=\frac{2(b-a)rv\partial v}{(1+rv^2)^2}$, so findet man

$$\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(c-a+(c-b)rv^2)}\sqrt{(d-a+(d-b)rv^2)}}.$$

Da $\frac{c-b}{c-a}-\frac{d-b}{d-a}=-\frac{(d-c)(b-a)}{(c-a)(d-a)}$, also $\frac{d-b}{d-a}>\frac{c-b}{c-a}$ ist, so setzen wir

$$\frac{d-b}{d-a}.r=1,\quad \frac{c-b}{c-a}r=k'^2,\quad v=\text{tn}\,u \text{ für den Modul } k,$$

wodurch wir erhalten $\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial u}{\sqrt{(c-a)}\sqrt{(d-a)}}$ und, da $\sqrt{r}=\sqrt{\frac{d-a}{d-b}}$ ist,

1. $y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(b-x)(c-x)(d-x))}}$,

2. $k'=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}$, $\quad k=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}$,

3. $\text{tn}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(d-a)(b-x)}}$; $\quad \text{tnc}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(b-x)}{(c-b)(x-a)}}$.

Aus den letzten Formeln leiten wir noch her:

$$4.\quad\begin{cases}\text{sn}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(d-x)}}, & \text{snc}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(b-x)}{(b-a)(c-x)}},\\ \text{cn}\,u=\sqrt{\frac{(d-a)(b-x)}{(b-a)(d-x)}}, & \text{cnc}\,u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(b-a)(c-x)}},\\ \text{dn}\,u=\sqrt{\frac{(d-a)(c-x)}{(c-a)(d-x)}}, & \text{dnc}\,u=\sqrt{\frac{(c-b)(d-x)}{(d-b)(c-x)}},\end{cases}$$

und die umgekehrten Formeln sind

5. $x=\frac{a(d-b)+d(b-a)\text{sn}^2u}{d-b+(b-a)\text{sn}^2u}=\frac{b(d-a)-d(b-a)\text{cn}^2u}{d-a-(b-a)\text{cn}^2u}=\frac{c(d-a)-d(c-a)\text{dn}^2u}{d-a-(c-a)\text{dn}^2u}$.

Vergleicht man den in dieser Integration vorkommenden Modul k mit den Formeln für k und k' in §. 237. und §. 238., so sieht man, dafs nur k mit k' vertauscht worden ist.

§. 241.

II. Die coordinirte Integration von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, im Vergleiche mit der in §. 240., ist der vorigen ähnlich; nur wird jetzt vorausgesetzt, dafs x zwischen den Grenzen c und d enthalten sei. Daher finden wir auch ähnliche Resultate, wie früher. Setzen wir nun

$$\frac{x-c}{d-x}=rv^2,$$

also $x=\frac{c+drv^2}{1+rv^2}$, $x-c=\frac{(d-c)rv^2}{1+rv^2}$, $d-x=\frac{d-c}{1+rv^2}$, $x-a=\frac{c-a+(d-a)rv^2}{1+rv^2}$

und $x-b=\frac{c-b+(d-b)rv^2}{1+rv^2}$, $\partial x=\frac{2(d-c).rv\partial v}{1+rv^2}$, so findet man

$$\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(c-a+(d-a)rv^2)}\sqrt{(c-b+(d-b)rv^2)}}$$

Da $\frac{d-b}{c-b}>\frac{d-a}{c-a}$ ist, so setzen wir $\frac{d-b}{c-b}.r=1$, $\frac{d-a}{c-a}r=k'^2$ und $v=\operatorname{tn} u$; dann ist wieder

$$1.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_c\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(d-x))}},$$

$$2.\quad k'=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},\qquad k=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},$$

$$3.\quad \operatorname{tn} u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-c)}{(c-b)(d-x)}},\qquad \operatorname{tnc} u=\sqrt{\frac{(c-a)(d-x)}{(d-a)(x-c)}}.$$

Ueberhaupt hat man nur in den Formeln §. 240. a mit c und b mit d zu vertauschen, um die gesuchten übrigen Formeln zu erhalten. Sie sind

$$4.\quad\begin{cases}\operatorname{sn} u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-c)}{(d-c)(x-b)}}, & \operatorname{snc} u=\sqrt{\frac{(c-a)(d-x)}{(d-c)(x-a)}},\\ \operatorname{cn} u=\sqrt{\frac{(c-b)(d-x)}{(d-c)(x-b)}}, & \operatorname{cnc} u=\sqrt{\frac{(d-a)(x-c)}{(d-c)(x-a)}},\\ \operatorname{dn} u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}}, & \operatorname{dnc} u=\sqrt{\frac{(d-a)(x-b)}{(d-b)(x-a)}},\end{cases}$$

und die umgekehrten

$$5.\quad x=\frac{c(d-b)-b(d-c)\operatorname{sn}^2 u}{d-b-(d-c)\operatorname{sn}^2 u}=\frac{d(c-b)+b(d-c)\operatorname{cn}^2 u}{c-b+(d-c)\operatorname{cn}^2 u}=\frac{a(c-b)-b(c-a)\operatorname{dn}^2 u}{c-b-(c-a)\operatorname{dn}^2 u}.$$

§. 242.

Von den coordinirten Werthen von x in den beiden Integrationen von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$.

Man mag $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ wie in §. 240. unter der Voraussetzung integriren, dafs x zwischen den Grenzen a und b enthalten sei, oder, wie in §. 241., unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen c und d enthalten sei: in beiden Fällen finden wir ein Argument u, welches zwischen den Grenzen 0 und K enthalten ist; auch stimmen die Moduln in beiden Fällen überein. Für $x=a$, so wie für $x=c$, ist $u=0$, und für $x=b$, so wie im zweiten Falle für $x=d$, ist $u=K$.

Man kann also dem Argumente u in beiden Integrationen wieder denselben Werth geben, und die dazu gehörigen Werthe von x, welche dann allein verschieden sind, nennen wir coordinirt. Den Werth von x, welchen die Formeln (5.) §. 240. geben, bezeichnen wir mit x; den Werth von x aber, welchen die Formeln (5.) §. 241. geben, bezeichnen wir mit x'. Dann ist für $u=0$, $x=a$ und $x'=c$, so wie für $u=K$, $x=b$ und $x'=d$; es sind also wieder a und c coordinirt, so wie b und d. Da überhaupt

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(d-x)} = \frac{(d-b)(x'-c)}{(d-c)(x'-b)},$$

ist, so haben wir die Gleichung

$$1.\quad \frac{x'-c}{x'-b} = \frac{d-c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{d-x}.$$

Eben so finden sich die Gleichungen

$$2.\quad \frac{d-x'}{x'-b} = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(c-b)}\cdot\frac{b-x}{d-x},$$

$$3.\quad \frac{x'-c}{d-x'} = \frac{c-b}{d-a}\cdot\frac{x-a}{b-x},$$

$$4.\quad \frac{x'-a}{x'-b} = \frac{d-a}{c-b}\cdot\frac{c-x}{d-x},$$

$$5.\quad \frac{d-x'}{x'-a} = \frac{d-c}{b-a}\cdot\frac{b-x}{c-x},$$

$$6.\quad \frac{x'-c}{x'-a} = \frac{(c-b)(d-c)}{(b-a)(d-a)}\cdot\frac{x-a}{c-x}.$$

Dividirt man noch (1.) durch (5.), so erhält man die noch bemerkenswerthere Gleichung

$$7.\quad \sqrt{\frac{(x'-c)(x'-a)}{(x'-b')(d-x')}} = \sqrt{\frac{(x-a)(c-x)}{(d-x)(b-x)}} = \sqrt{\left(\frac{c-a}{d-b}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}.$$

Sieht man in dieser Gleichung $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\cdot\sqrt{\left(\frac{c-a}{d-b}\right)}$ als gegeben an, so kann man mittelst derselben gleichzeitig x und x' als die Wurzeln einer und derselben quadratischen Gleichung darstellen. Schafft man in den Gleichungen (1—6.) die Nenner fort, so erhält man die Gleichung

$$8.\quad (d+b-a-c)xx'-(bd-ac)(x+x')+bd(a+c)-ac(d+b)=0,$$

welche mit der Gleichung (4.) §. 239. übereinstimmt und auch wieder in den Formen

$$9.\quad \frac{bd-xx'}{xx'-ac}=\frac{d+b-x-x'}{x+x'-a-c},\quad \frac{xx'-ac}{bd-ac}=\frac{x+x'-a-c}{b+d-a-c},\quad \frac{bd-xx'}{bd-ac}=\frac{b+d-x-x'}{b+d-a-c}$$

dargestellt werden kann.

§. 243.

Eine zweite Art der Coordination bei der Integration $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R}}$ und $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R'}}$.

Ist $\partial y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ bereits integrirt, und darin $a < b < c < d$, ferner etwa x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so kann man aus den Resultaten sogleich noch eben so viele neue herleiten, wenn man, beachtend, dafs nun $-d < -c < -b < -a$ ist, a mit $-d$ und b mit $-c$ vertauscht; die Grenzen von x sind dann also $-d$ und $-c$, und da $-d$ wieder kleiner als $-c$ ist, weil $-c-(-d) = d-c$ positiv ist, so ist das neue Integral einstimmig mit dem alten. Verwandelt sich durch die genannte Vertauschung R in R', so hat man, da $R = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist,

$$R' = (x+d)(x+c)(x+b)(x+a).$$

Das Integral $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ verwandelt sich also in $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$, und eben so $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ in $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$.

Ganz wie beim Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ den Grenzen a und b von x die Grenzen $-d$ und $-c$ von x im Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$ entsprechen, so entsprechen auch den Grenzen c und d von x in jenem Integrale die Grenzen $-b$ und $-a$ von x in diesem.

Weiter entsprechen den Grenzen d und a von x im Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ die Grenzen $-a$ und $-d$ von x im Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$, und eben so entsprechen den Grenzen b und c von x im Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ die Grenzen $-c$ und $-d$ im Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$.

Aus den vorhin entwickelten vier Arten von Formeln, welche sich auf die Integration von $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R}}$ beziehen, lassen sich also nach der vorstehenden allgemeinen Regel sogleich durch eine einfache Uebertragung noch eben so viele neue Formeln herleiten, welche sich auf die Integration von $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R'}}$ beziehen, und zu jeder von den vier ersten Arten von Formeln gehört auch nur eine von den vier letzten Arten.

Es verdient noch angemerkt zu werden, dafs sich die beiden Integrale $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $y' = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$ mit einander vertauschen, und dafs die

zusammengehörigen Grenzen sich ebenfalls vertauschen, wenn man gleichzeitig $-x$ statt x und $-y$ statt y setzt. Dasselbe gilt von den beiden Integralen $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ und $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$. Hat die Gleichung $R=0$ zwei positive und zwei negative Wurzeln, so hat die Gleichung $R'=0$ zwei negative und zwei positive Wurzeln. Ist $R=A+2Bx+Cx^2+Dx^3+x^4$, so ist $R'=A-2Bx+Cx^2-Dx^3+x^4$.

§. 244.

Vertauschen wir nun wirklich in den Formeln §. 240., dem §. 243. gemäfs, a mit $-d$ und b mit $-c$, so erhalten wir Formeln, welche sich auf die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$ beziehen unter der Voraussetzung, dafs *x zwischen den Grenzen $-d$ und $-c$* enthalten ist. Wir finden

$$1.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_{-d}\frac{\partial x}{\sqrt{(-(x+a)(x+b)(x+c)(x+d))}},$$

$$2.\quad k=\sqrt{\frac{(d-c)(b-a)}{(d-b)(c-a)}}\quad\text{und}\quad k'=\sqrt{\frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)}},$$

$$3.\quad \mathrm{tn}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(x+d)}{(d-a)(-c-x)}}\quad\text{und}\quad \mathrm{tnc}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(-c-x)}{(c-b)(x+d)}}.$$

Hier stimmen also die Formeln (1.) und (2.) wieder mit denen §. 240. überein; was sehr bemerkenswerth und die Ursache ist, dafs wir diese Integration ebenfalls der in §. 240. coordinirt nennen. Die übrigen Formeln sind:

$$4.\quad\begin{cases}\mathrm{sn}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(x+d)}{(d-c)(-a-x)}}; & \mathrm{snc}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(-c-x)}{(d-c)(-b-x)}},\\ \mathrm{cn}\,u=\sqrt{\frac{(d-a)(-c-x)}{(d-c)(-a-x)}}; & \mathrm{cnc}\,u=\sqrt{\frac{(c-b)(x+d)}{(d-c)(-b-x)}},\\ \mathrm{dn}\,u=\sqrt{\frac{(d-a)(-b-x)}{(d-b)(-a-x)}}; & \mathrm{dnc}\,u=\sqrt{\frac{(c-b)(-a-x)}{(c-a)(-b-x)}},\end{cases}$$

und die umgekehrten,

$$5.\quad x=\frac{-d(c-a)-a(d-c)\,\mathrm{sn}^2u}{c-a+(d-c)\,\mathrm{sn}^2u}=\frac{-c(d-a)+a(d-c)\,\mathrm{cn}^2u}{d-a-(d-c)\,\mathrm{cn}^2u}$$
$$=\frac{-b(d-a)+a(d-b)\,\mathrm{dn}^2u}{d-a-(d-b)\,\mathrm{dn}^2u}.$$

Bezeichnen wir den nach diesen Formeln berechneten Werth von x mit x', hingegen den nach den Formeln (5.) §. 240. berechneten Werth

von x wieder mit x, so erhalten wir, wenn wir die hier vorkommenden Modular-Functionen von u mit den gleichlautenden in §. 240., mit welchen sie ohnehin im Modul übereinstimmen, identificiren, die Gleichungen

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{x'+d}{-a-x'} = \dfrac{(d-c)(d-b)}{(c-a)(b-a)}\cdot\dfrac{x-a}{d-x}, & \dfrac{-b-x'}{-a-x'} = \dfrac{d-b}{c-a}\cdot\dfrac{c-x}{d-x}, \\[2mm] \dfrac{-c-x'}{-a-x'} = \dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{b-x}{d-x}, & \dfrac{-c-x'}{-b-x'} = \dfrac{(d-c)(c-a)}{(b-a)(d-b)}\cdot\dfrac{b-x}{c-x}, \\[2mm] \dfrac{x'+d}{-c-x'} = \dfrac{d-b}{c-a}\cdot\dfrac{x-a}{b-x}, & \dfrac{x'+d}{-b-x'} = \dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{x-a}{c-x}, \end{cases}$$

welchen gemäfs man für jeden Werth von x den zugeordneten Werth von x' und umgekehrt jenen aus diesem berechnen kann. Wird die sechste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man

$$7.\quad \sqrt{\frac{(x'+d)(-a-x')}{(-b-x')(-c-x')}} = \sqrt{\frac{(x-a)(d-x)}{(b-x)(c-x)}} = \frac{d-a}{\sqrt{((d-b)(c-a))}}\cdot\frac{\text{tn}\,u}{\text{dn}\,u}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{d-a}{c-b}\right)}\cdot\frac{\text{cnc}\,u}{\text{cn}\,u},$$

und hiernach lassen sich, wenn man $\dfrac{d-a}{\sqrt{((d-b)(c-a))}}\cdot\dfrac{\text{tn}\,u}{\text{dn}\,u}$ als gegeben betrachtet, x und $-x'$ oder $-x$ und x' als die Wurzeln einer und derselben quadratischen Gleichung darstellen. Zu demselben Resultate führt die Verbindung der dritten und vierten Gleichung. Schaffen wir in einer der Gleichungen (6.), welche auch durch Umformung aus einander hergeleitet werden können, die Nenner weg, so erhält man nach einer leichten Reduction die Gleichung

$$8.\quad (d+a-b-c).xx'+(ad-bc)(x-x')-ad(b+c)+bc(a+d)=0,$$

welche sich auch auf folgende Arten darstellen läfst:

$$9.\quad \frac{xx'+bc}{xx'+ad} = \frac{b+c-(x-x')}{d+a-(x-x)},\quad \frac{xx'+bc}{ad-bc} = \frac{b+c-(x-x')}{d+a-b-c}\ \text{und}$$
$$\frac{xx'+ad}{ad-bc} = \frac{d+a-(x-x')}{d+a-b-c}.$$

Setzen wir für den Augenblick $\sqrt{\left(\dfrac{d-a}{c-b}\right)}\cdot\dfrac{\text{cnc}\,u}{\text{cn}\,u} = v$, so giebt die Gleichung (7.) die beiden quadratischen Gleichungen

$$(1+v^2)\,x^2-((b+c)v^2+a+d)\,x+bcv^2+ad = 0,$$
$$(1+v^2)x'^2+((b+c)v^2+a+d)x'+bcv^2+ad = 0,$$

wovon die erste mit der zweiten übereinstimmt, wenn man in jener $-x'$ statt x, oder in dieser $-x$ statt x' setzt; daher sind x und $-x'$ die Wur-

zeln der ersten, x' und $-x$ aber die Wurzeln der zweiten Gleichung. Aus diesen Gleichungen ziehen wir also

$$x.x' = -\frac{bcv^2+ad}{1+v^2}, \quad x-x' = \frac{(b+c)v^2+a+d}{1+v^2},$$

woraus nach einander folgt:

$$xx'+bc = \frac{-ad+bc}{1+v^2}, \quad xx'+ad = \frac{(-bc+ad)v^2}{1+v^2}, \text{ also}$$

$$-\frac{xx'+ad}{xx'+bc} = -\frac{d+a-(x-x')}{b+c-(x-x')} = v^2.$$

Aehnliche Resultate lassen sich auch aus den Formeln §. 241. und auch aus denen §. 237. und 238. herleiten; womit wir uns jedoch hier nicht länger aufhalten, da diese Herleitung keine Schwierigkeit hat.

§. 245.

Zweite ziemlich einfache Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, $\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$, welche zu einem reellen Modul führt, der <1 ist.

Bezeichnen wir in den früheren Integrationen das Argument mit v und den Modul mit λ, den conjugirten Modul also mit λ'; setzen also v statt u, λ statt k und λ' statt k', und erinnern uns der Formel $\sqrt{\lambda}.\text{sn}\,v = \sqrt{\frac{1-\text{dn}\,u}{1+\text{dn}\,u}}$ in §. 51., so ist der neue Modul $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$, also $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ und $v = \frac{u}{1+\lambda}$.

1. Benutzen wir diese Bezeichnung, so ist in §. 237. das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2v}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$, $\lambda' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}$ und $\lambda = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}$; daher ist der neue Modul

$$1. \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt[4]{((c-a)(d-b)(c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}} \text{ und} \\ k' = \dfrac{\sqrt{((c-a)(d-b))}-\sqrt{((c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}}, \end{cases}$$

$$2. \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}} = \int_d \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{\frac{1-\text{dn}\,u}{1+\text{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}.\sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}}, \text{ oder auch}$$

$$3. \quad \sqrt{\frac{1-\text{dn}\,u}{1+\text{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\frac{(c-b)(c-a)}{(d-b)(d-a)}}.\sqrt{\frac{x-d}{x-c}},$$

und die umgekehrte Formel ist

$$4.\quad x = \frac{d\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\operatorname{dn}u) - c\sqrt{((d-b)(d-a))}.(1-\operatorname{dn}u)}{\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\operatorname{dn}u) - \sqrt{((d-b)(d-a))}.(1-\operatorname{dn}u)}.$$

Für $u=0$ ist nun $x=d$ und für $u=K$ ist $x=c$, wenn man beachtet, dafs dann $\operatorname{dn}u=k'$ und

$$\frac{1-k'}{1+k'} = \frac{\sqrt{((c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}} \text{ ist.}$$

II. Soll dasselbe Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen b und c enthalten sei, gefunden werden, so bleiben die Formeln (1.) und (2.) ungeändert, nur dafs jetzt y und u für $x=b$ verschwinden. Ferner ist nun

$$5.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \sqrt[4]{\frac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(c-b)}}.\sqrt[2]{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$6.\quad x = \frac{b\sqrt{((d-a)(c-a))}.(1+\operatorname{dn}u) - a\sqrt{((d-b)(c-b))}.(1-\operatorname{dn}u)}{\sqrt{((d-a)(c-a))}.(1+\operatorname{dn}u) - \sqrt{((d-b)(c-b))}.(1-\operatorname{dn}u)}.$$

III. Soll das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ gefunden werden unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen a und b enthalten ist, so müssen wir, dem §. 240. gemäfs, $\lambda = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}$ setzen, wodurch wir erhalten

$$7.\quad \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt[4]{((b-a)(d-c)(c-a)(d-b))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}}, \\[2ex] k' = \dfrac{\sqrt{((c-a)(d-b))}-\sqrt{((b-a)(d-c))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}}, \end{cases}$$

$$8.\quad y = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}} = \int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}},$$

$$9.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \sqrt[4]{\frac{(d-c)(d-b)}{(c-a)(b-a)}}.\sqrt[2]{\frac{x-a}{d-x}},$$

$$10.\quad x = \frac{a\sqrt{((d-c)(d-b))}.(1+\operatorname{dn}u) + d\sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\operatorname{dn}u)}{\sqrt{((d-c)(d-b))}.(1+\operatorname{dn}u) + \sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\operatorname{dn}u)}.$$

Es ist nun $x=a$ für $u=0$ und $x=b$ für $u=K$.

IV. Soll das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ gefunden werden, und liegt x zwischen den Grenzen c und d, so gelten wieder die Formeln (7.) und (8.). Aufserdem ist

$$11.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \sqrt[4]{\frac{(b-a)(d-b)}{(c-a)(d-c)}}.\sqrt{\frac{x-c}{x-b}},$$

$$12.\quad x = \frac{c\sqrt{((b-a)(d-b))}.(1+\operatorname{dn}u) - b\sqrt{((c-a)(d-c))}.(1-\operatorname{dn}u)}{\sqrt{((b-a)(d-b))}.(1+\operatorname{dn}u) - \sqrt{((c-a)(d-c))}.(1-\operatorname{dn}u)}.$$

Aus den vorstehenden Formeln erhält man, dem §. 243. gemäfs, sogleich noch eben so viele Formeln, indem man a mit $-d$ und b mit $-c$ vertauscht.

§. 246.

Die Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)$ und also nur eine cubische Form ist.

Ist R nur eine arithmetische Form des dritten Grades und $=(x-a)(x-b)(x-c)$, so erhält man die sich auf die Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ beziehenden Formeln, wenn man nur in den früheren Formeln d positiv und $=\frac{1}{0}$ setzt. Dadurch erhält man sofort aus den Formeln §. 237., indem man wieder $a<b<c$ annimmt,

$$\text{I.}\begin{cases} y=\int_{\frac{1}{0}}\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}}, \\ k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}}, \quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \\ \operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)}{a-x}}, \quad \operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{c-a}{c-x}}, \quad \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{x-a}{x-c}}, \quad \operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{x-b}{x-c}}, \\ x=\frac{a-c.\operatorname{cn}^2u}{\operatorname{sn}^2u}. \end{cases}$$

Hiernach ist für $u=0$ die Gröfse $x=\frac{1}{0}$ und für $u=K$ ist $x=a$, und also x zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{0}$ und a enthalten.

II. Die Formeln §. 238. geben

$$y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}}, \quad k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}}, \quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},$$

$$\operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(b-a)(c-x)}}, \quad \operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}}, \quad \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{(b-a)(c-x)}{(c-b)(x-a)}},$$

$$\operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{b-a}{x-a}},$$

$$\operatorname{tnc}u=\sqrt{\frac{c-x}{x-b}}, \quad \operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{c-x}{c-b}}, \quad \operatorname{cnc}u=\sqrt{\frac{x-b}{c-b}}, \quad \operatorname{dnc}u=\sqrt{\frac{x-a}{c-a}},$$

$$x=\frac{b(c-a)-a(c-b)\operatorname{sn}^2u}{c-a-(c-b)\operatorname{sn}^2u}=\frac{b-a+a\operatorname{dn}^2u}{\operatorname{dn}^2u},$$

und es ist also $x=b$ für $u=0$; ferner $x=c$ für $u=K$; also x zwischen den Grenzen b und c enthalten.

III. Die Formeln §. 240. geben nun

$$y=\int_a\frac{\partial x}{\sqrt{R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}},\qquad k=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},\qquad k'=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},$$

$$\mathrm{tn}\,u=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}},\quad \mathrm{sn}\,u=\sqrt{\frac{x-a}{b-a}},\quad \mathrm{cn}\,u=\sqrt{\frac{b-x}{b-a}},\quad \mathrm{dn}\,u=\sqrt{\frac{c-x}{c-a}},\ \text{und}$$

$$x=a+(b-a)\,\mathrm{sn}^2u=b-(b-a)\,\mathrm{cn}^2u=c-(c-a)\,\mathrm{dn}^2u.$$

Für $u=0$ ist $x=a$ und für $u=K$ ist $x=b$, also x zwischen den Grenzen a und b enthalten.

IV. Die Formeln §. 241. geben

$$y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}},\qquad k=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},\qquad k'=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},$$

$$\mathrm{tn}\,u=\sqrt{\frac{x-c}{c-b}},\quad \mathrm{sn}\,u=\sqrt{\frac{x-c}{x-b}},\quad \mathrm{cn}\,u=\sqrt{\frac{c-b}{x-b}},\quad \mathrm{dn}\,u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}},$$

$$\mathrm{tnc}\,u=\sqrt{\frac{c-a}{x-c}},\quad \mathrm{snc}\,u=\sqrt{\frac{c-a}{x-a}},\quad \mathrm{cnc}\,u=\sqrt{\frac{x-c}{x-a}},\quad \mathrm{dnc}\,u=\sqrt{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$x=\sqrt{\frac{c-b\,\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{cn}^2u}}.$$

Diesen Formeln gemäfs ist $x=c$ für $u=0$ und $x=\frac{1}{0}$ für $u=K$, also x im Allgemeinen zwischen den Grenzen c und $\frac{1}{0}$ enthalten.

§. 247.

Zweite Art der Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)$ ist.

Es sei wieder $a<b<c$. Setzen wir in den Formeln §. 245. ebenfalls $d=\frac{1}{0}$, so erhalten auf der Stelle die gesuchten Formeln.

I. Ist x zwischen $\pm\frac{1}{0}$ und a enthalten, so ist

$$k=\frac{2\sqrt[4]{((c-a)(c-b))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}}\quad\text{und}\quad k=\frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(c-b)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},$$

$$\int_{\frac{1}{0}}\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},\qquad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=\sqrt[4]{\frac{(c-b)(c-a)}{(c-x)^2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{((c-b)(c-u))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-c(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\ (1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

II. Ist x zwischen b und c enthalten, so ist

$$k=\frac{2\sqrt[4]{((c-a)(c-b))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},\qquad k'=\frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(c-b)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},$$

$$\int_b \frac{\partial x}{\sqrt{-R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.\sqrt{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$x = \frac{b\sqrt{(c-a)}.(1+\mathrm{dn}\,u)-a\sqrt{(c-b)}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{(c-a)}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\sqrt{(c-b)}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

III. Ist x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so hat man

$$k = \frac{2\sqrt{(b-a)(c-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad k' = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}},$$

$$\int_a \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)}},$$

$$x = \frac{a(1+\mathrm{dn}\,u)+\sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{1+\mathrm{dn}\,u}.$$

IV. Ist endlich x zwischen den Grenzen c und $\frac{1}{0}$ enthalten, so hat man

$$k = \frac{2\sqrt{((b-a)(c-a))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad k' = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}},$$

$$\int_c \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)}.\sqrt{\frac{x-c}{x-b}},$$

$$x = \frac{c\sqrt{(b-a)}.(1+\mathrm{dn}\,u)-b\sqrt{(c-a)}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{(b-a)}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\sqrt{(c-a)}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

§. 248.

Die Integration $y = \int \frac{X.\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn X eine rationale (ganze oder gebrochene) Function von x, und R eine arithmetische Form des dritten und vierten Grades in Ansehung von x ist.

Es ist im Vorhergehenden umständlich davon gehandelt worden, wie das Differenzial $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ eine Gleichung vom dritten oder vierten Grade in Beziehung auf x ist, jedesmal auf $M.\partial u$ reducirt werden kann, wo M eine Constante bezeichnet; und bei dieser Umformung ist, wenn t eine Modular-Function des Arguments u vorstellt, der Ausdruck von x entweder von der Form

$$x = \frac{A+Bt}{C+Dt} \text{ oder } x = \frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}.$$

Substituirt man denselben Werth von x, durch welchen $\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = M.\partial u$ wird, auch in dem Factor X, so erhält der Ausdruck $\frac{X.\partial x}{\sqrt{R}}$ die Form $U.\partial u$, und es ist also

$$y = \int U.\partial u,$$

wenn durch U eine rationale ganze Function von t bezeichnet wird. Ist U eine rationale ganze Function von t, so besteht U aus Gliedern von der Form at^{2n+1} und bt^{2n}, und da t eine Modular-Function des Arguments u ist, so können die Integrale $\int at^{2n+1}.\partial u$ und $\int bt^{2n}.\partial u$ nach den Reductionsformeln des §. 71. gefunden werden.

Ist aber U eine gebrochene Function von t, so kann sie zerfällt werden in Glieder von der Form at^{2n+1}, bt^{2n}, $\frac{a}{(\alpha+\beta t)^r}$ und $\frac{b}{(\alpha+\beta t^2)^r}$, welche mit ∂u multiplicirt und dann integrirt werden müssen.

Man kann aber auch vor der Zerfällung von U, $t = \frac{1}{t'}$ setzen; und wird die Zerfällung nun vorgenommen, so erhält man Glieder von der Form

$$\frac{a}{t'^{2n-1}}, \quad \frac{b}{t'^{2n-1}}, \quad \frac{a}{(\alpha+\beta t')^r} \text{ und } \frac{b}{(\alpha+\beta t'^2)^r},$$

welche einerlei sind mit

$$at^{2n-1}, \quad bt^{2n-1}, \quad \frac{at^r}{(\beta+\alpha t)^r} \text{ und } \frac{bt^{2r}}{(\beta+\alpha t^2)^{2r}}.$$

Es ist daher nur noch von der Integration der Brüche

$$\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}, \quad \frac{t^r.\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}, \quad \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} \text{ und } \frac{t^{2r}.\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$$

zu handeln.

§. 249.

Die Integration von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$ und $\frac{t^r.\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$, wenn t eine Modular-Function von u ist.

Da t eine Modular-Function von u ist, so wird der Zusammenhang zwischen t und u durch eine Differenzial-Gleichung von der Form

$$\partial u = \frac{\pm\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$$

ausgedrückt, und es ist also, wenn $\partial y = \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$ ist,

$$\partial y = \frac{\pm\partial t}{(\alpha+\beta t)^r.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} \text{ oder } \pm y = \int\frac{\partial t}{(\alpha+\beta t)^r.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$$

Setzen wir nun $\alpha+\beta t = v$, also $t = \frac{v-\alpha}{\beta}$, $\partial t = \frac{\partial v}{\beta}$, $a+2bt^2+ct^4 = \frac{a\beta^4+2b\beta^2(v-\alpha)^2+c(v-\alpha)^4}{\beta^4} = \frac{A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4}{\beta^4}$, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$A = a\beta^4+2b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4, \quad B = -(b\beta^2\alpha+c\alpha^3), \quad C = b\beta^2+3c\alpha^2,$$
$$D = -c\alpha, \quad E = c.$$

und also $\pm y = \int \frac{\beta \partial v}{v^r \sqrt{(A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4)}}$. Differenziirt man nun, zur Abkürzung setzend: $A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4 = R$, also $\partial R = 4(B+Cv+3Dv^2+Ev^3).\partial v$, den Ausdruck $\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}$, so erhält man $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{v.\frac{1}{2}\partial R-(r-1)R.\partial v}{v^r.\sqrt{R}}$, oder

$$\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = -\frac{(r-1)A.\partial v}{v^r.\sqrt{R}} - \frac{2(2r-3)B.\partial v}{v^{r-1}.\sqrt{R}} - \frac{2(r-2)C.\partial v}{v^{r-2}.\sqrt{R}} - \frac{2(2r-6)D.\partial v}{v^{r-3}.\sqrt{R}} - \frac{E(r-3).\partial v}{v^{r-4}.\sqrt{R}}.$$

Da aber $\sqrt{R} = \beta^2.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}$, also $\beta\frac{\partial v}{\sqrt{R}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \pm\partial u$ ist, so erhält man, wenn man

$$\int \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r} = [r]$$

setzt, die Reductions-Formel

$$\text{I.}\quad \frac{\pm\beta^3\sqrt{(a+2bt^2+t^4)}}{(\alpha+\beta t)^{r-1}} =$$

$$-(a\beta^4+2b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4)(r-1).[r]+2(b\beta^2\alpha+c\alpha^3)(2r-3).[r-1]$$
$$-2(b\beta^2+3c\alpha^2)(r-2).[r-2]+2c\alpha(2r-5).[r-3]-c(r-3).[r-4].$$

Ist z. B. $t = \operatorname{sn} u$, also $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)}}$, so hat man $a=1$, $2b = -(1+k^2)$, $c = k^2$, folglich

$$\frac{\beta^3 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(\alpha+\beta \operatorname{sn} u)^{r-1}} =$$

$$-(\alpha^2-\beta^2)(k^2\alpha^2-\beta^2)(r-1)[r] + (2k^2\alpha^3-(1+k^2)\beta^2\alpha)(2r-3)[r-1]$$
$$+((1+k^2)\beta^2-6\alpha^2k^2)(r-2)[r-2]+2k^2\alpha(2r-5)[r-3]-k^2(r-3)[r-4].$$

Setzt man aufserdem $\alpha = 1$ und $\beta = k\operatorname{sn} a$, so hat man

$$\frac{k\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1+k\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)^{r-2}} = -\frac{\operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{tn}^2 a}(r-1).[r] + \frac{\operatorname{cn}^2 a+\operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 a}(2r-3).[r-1]$$
$$+\frac{-6+(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 a}(r-2).[r-2] + \frac{2(2r-5)}{\operatorname{sn}^2 a}.[r-3] - \frac{(r-3)}{\operatorname{sn}^2 a}.r-4],$$

und in dieser Formel ist $[r] = \int \frac{\partial u}{(1+k\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)^r}$.

Ist $r=1$, so kann das Integral nach §. 210 — 213. gefunden werden. Wir können aus der vorigen allgemeinen Formel sogleich noch eine zweite herleiten, indem wir α mit β, a mit c und $\frac{1}{t}$ mit t vertauschen. Da-

durch verwandelt sich $\partial u = \pm\frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ in $\frac{-\partial t}{\pm t^2\sqrt{\left(c+\frac{2b}{t^2}+\frac{a}{t^4}\right)}}$ $= \frac{-\partial u}{\pm\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, d. h. es verwandelt sich ∂u in $-\partial u$. Setzen wir nun das Integral

$$\int\frac{t^r.\partial u}{(\alpha+\beta t)^r} = [r],$$

so haben wir noch die Formel

$$\text{II.}\quad \pm\frac{\alpha^3.t^{r-3}.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t)^{r-1}}$$

$$= (a\beta^4+2b\beta^2\alpha^2+c\alpha^4)(r-1).[r]-2(b\alpha^2\beta+a\beta^3)(2r-3).[r-1]$$
$$+2(b\alpha^2+3a\beta^2)(r-2).[r-2]-2a\beta(2r-5).[r-3]-a(r-3).[r-4],$$

in welcher wieder $\partial u = \pm\frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ ist.

§. 250.

Die Integrationen von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$ und $\frac{t^{2r}.\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$, wenn t eine Modular-Function des Arguments u ist.

Ist $y=\int\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$ und wieder $\partial u = \frac{\pm\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, also $\pm y$ $=\int\frac{\partial t}{(\alpha+\beta t^2)^r\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, so setze man $\alpha+\beta t^2 = v$; alsdann ist $t = \sqrt{\frac{v-\alpha}{\beta}}$, $\partial t = \frac{\partial v}{2\sqrt{\beta}.\sqrt{(v-\alpha)}}$; ferner $a+2bt^2+ct^4 = \frac{a\beta^2+2b\beta(v-\alpha)+c(v-\alpha)^2}{\beta^2}$; folglich

$$\pm\partial y = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\beta}.\partial v}{v^r\sqrt{(a\beta^2(v-\alpha)+2b\beta(v-\alpha)^2+c(v-\alpha)^3)}} \text{ oder}$$

$$\pm\partial y = \frac{\frac{1}{2}.\partial v}{v^r\sqrt{(A+Bv+Cv^2+Dv^3)}},$$

wenn man zur Abkürzung

$$A = -a\beta\alpha+2b\alpha^2-\frac{c}{\beta}\alpha^3,\quad B = a\beta-4b\alpha+\frac{3c\alpha^2}{\beta},$$
$$C = 2b-\frac{3c\alpha}{\beta},\quad D = \frac{c}{\beta}$$

setzt. Ferner ist, wenn man $A+Bv+Cv^2+Dv^3 = R$ setzt, die Gröfse $R = a\beta(v-\alpha)+2b(v-\alpha)^2+\frac{c}{\beta}(v-\alpha)^3 = a\beta^2t^2+2b\beta^2t^4+c\beta^2t^6 = \beta^2t^2(a+2bt^2+ct^4)$, also $\sqrt{R} = \beta t\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}$.

Differenziirt man nun $\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}$, so erhält man $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{v\partial R-(2r-2)R.\partial v}{2v^r\sqrt{R}}$

oder $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{-(2r-2)A.\frac{1}{2}\partial v}{v^r.\sqrt{R}} - \frac{(2r-3)B.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-1}.\sqrt{R}} - \frac{2(r-4)C.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-2}.\sqrt{R}} - \frac{(2r-5)D.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-3}.\sqrt{R}}$

und da $\frac{\frac{1}{2}\partial v}{\sqrt{R}} = \frac{\beta t.\partial t}{\beta t\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \pm\partial u$ ist, so hat man, wenn man gliedweise integrirt und zur Abkürzung

$$\int\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} = [r]$$

setzt, die allgemeine Reductionsformel

$$\text{I.}\quad \pm\frac{\beta t\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t^2)^{r-1}}$$

$$= \left(a\beta\alpha-2b\alpha^2+\frac{c}{\beta}\alpha^3\right)(2r-2).[r] - \left(a\beta-4b\alpha+\frac{3c\alpha^2}{\beta}\right)(2r-3).[r-1]$$
$$-\left(2b-\frac{3c\alpha}{\beta}\right).(2r-4).[r-2] - \frac{c}{\beta}(2r-5).[r-3].$$

Vertauscht man in dieser Formel a mit c, α mit β und $\frac{1}{t}$ mit t, wodurch sich ∂u in $-\partial u$ verwandelt, und setzt das Integral

$$\int\frac{t^{2r}.\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} = [r],$$

so erhält man die neue Formel

$$\text{II.}\quad \pm\frac{\alpha t^{2r-3}.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t^2)^{r-1}}$$

$$= -\left(c\alpha\beta-2b\beta^2+\frac{a\beta^3}{\alpha}\right)(2r-2).[r] + \left(c\alpha-4b\beta+\frac{3a\beta^2}{\alpha}\right)(2r-3)[r-1]$$
$$+\left(2b-\frac{3a\beta}{\alpha}\right)(2r-4).[r-2] + \frac{a}{\alpha}(2r-5)[r-3],$$

in welcher wieder $\partial u = \frac{\pm\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ ist und also t eine beliebige Modular-Function des Arguments u oder auch seines Complements vorstellt.

§. 251.

Reduction des Unterschiedes zweier Modular-Integrale von der zweiten oder vierten Classe, deren Parameter sich zu K ergänzen, auf ein einziges Integral von derselben Classe.

Beziehen wir die Modular-Functionen des Arguments u auf den Modul k, und die des Arguments v auf den kleineren Modul λ, wie in §. 51—54., so ist nach Formel (13.) §. 52.

$$\text{dn}\,2v = \frac{\text{dn}\,u+\text{dnc}\,u}{1+k'},$$

also $\mathrm{dn}^2 2v = \frac{\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{dnc}^2 u + 2k'}{(1+k')^2}$ und $2v = (1+k').u$, also $\partial(2v) = (1+k').\partial u$. Multiplicirt man hiermit die vorige Gleichung und integrirt, so entsteht

$$\mathrm{el}\, 2v = \frac{\mathrm{el}\, u + E - \mathrm{elc}\, u + 2k'u}{1+k'}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u = K$, also $v = L$, und bezeichnet den zum Modul λ gehörigen elliptischen Quadranten mit E, so hat man, da $\mathrm{el}(2L) = 2E_1$ ist,

$$2E_1 = \frac{2E + 2k'.K}{1+k'}, \text{ und da } 2L = (1+k').K, \text{ also}$$

$$\frac{v}{L} = \frac{u}{K}, \text{ mithin}$$

$$\frac{E_1}{L}.2v = \frac{\frac{2E.u}{K} + 2k'u}{1+k'}$$

ist, so erhält man durch die Subtraction dieser Gleichung von der obigen:

$$\mathrm{el}\, 2v - \frac{E_1}{L}.2v = \frac{\mathrm{el}\, u - \frac{E}{K}.u - \left(\mathrm{el}(K-u) - \frac{E}{K}(K-u)\right)}{1-k'}$$

Da nach §. 201. $\mathrm{el}\, u - \frac{E}{K}.u = H(u)$, $\mathrm{el}(K-u) - \frac{E}{K}(K-u) = H(K-u) = G(u)$, und eben so auch, mit Beziehung auf den Modul λ, $\mathrm{el}(2v) - \frac{E_1}{L}.(2v) = H(2v)$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$1. \quad H(2v) = \frac{H(u) - G(u)}{1+k'},$$

wenn man $H(u)$ und $G(u)$ auf den Modul k, hingegen $H(2v)$ auf den kleineren Modul $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ bezieht.

Multiplicirt man die vorige Gleichung mit $\partial(2v) = (1+k').\partial u$, und integrirt, so entsteht, da $H(u).\partial u = \partial \log Hl(u)$ und $-G(u).\partial u = \partial \log Gl(u)$ ist, die Gleichung $\log Hl(2v) = \log Hl(u) + \log Gl(u) + \log \alpha$, wenn man die Constante der Integration mit $\log \alpha$ bezeichnet; oder auch $Hl(2v) = \alpha.Hlu.Glu$. Da nun für $u = v = 0$, $Hlu = \sqrt{k'}$, $Glu = 1$ und $Hl(2v) = \sqrt{\lambda'}$ ist, so ergiebt sich $\sqrt{\lambda'} = \alpha.\sqrt{k'}$, und also

$$2. \quad \frac{Hl(2v)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{k^1}}.Hlu.Glu.$$

Man findet auch noch zwei neue Gleichungen auf folgende Art.

Es ist nach §. 52. $\sqrt{\lambda}.\mathrm{sn}\,2v = k\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$, und da $\mathrm{sn}\,2v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.\frac{Al(2v)}{Hl(2v)}$, $\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{Alu}{Hlu}$, $\mathrm{snc}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{Blu}{Glu}$, also

$$\frac{Al(2v)}{Hl(2v)} = \frac{Alu}{Hlu}.\frac{Blu}{Glu}$$

ist, so findet man, wenn die Gleichung (2.) hiermit multiplicirt wird,

$$3.\quad \frac{Al(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}.Alu.Blu.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen und differenziirt die Gleichung, so entsteht, da $\partial\log Al(2v) = A(2v).2\partial v$, $\partial\log Alu = A(u).\partial u$, $\partial\log Blu = -B(u).\partial u$ und $\partial(2v) = (1+k').\partial u$ ist, die Formel

$$4.\quad A(2v) = \frac{A(u)-B(u)}{1+k'}.$$

Zusatz. Da nach §. 54. $L = \frac{1+k'}{2}.K$ und $L' = (1+k').K'$, also $LL' = \frac{(1+k')^2}{2}.KK'$ und $2v = (1+k').u$, folglich $(2v)^2 = (1+k')^2.u^2$ ist, so ist $\frac{(2v)^2}{LL'} = 2.\frac{u^2}{KK'}$, also $\frac{\pi(2v)^2}{4LL'} = 2\frac{\pi u^2}{4KK'}$ und $e^{-\frac{\pi(2v)^2}{4LL'}} = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}$. Da nun $Hlu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{B}l'u$, $Glu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{G}l'u$, $Alu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{A}l'u$ und $Blu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{H}l'u$ ist, so verwandeln sich die obigen Gleichungen (2. und 3.) in

$$5.\quad \frac{\mathfrak{B}l'(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\mathfrak{B}l'u.\mathfrak{G}l'u \text{ und}$$

$$6.\quad \frac{\mathfrak{A}l'(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\mathfrak{A}l'u.\mathfrak{H}l'u.$$

Werden diese beiden Gleichungen logarithmisch differenziirt, so erhält man noch

$$7.\quad \mathfrak{B}'(2v) = \frac{\mathfrak{B}'(u)+\mathfrak{G}'(u)}{1+k'},$$

$$8.\quad \mathfrak{A}'(2v) = \frac{\mathfrak{A}'(u)-\mathfrak{H}'(u)}{1+k'}.$$

In diesen Gleichungen (5—8.) beziehen sich also die Functionen des Arguments u auf den Modul k', während die Functionen des Arguments $2v = (1+k').u$ sich auf den Modul $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ beziehen.

§. 252.

Wählen wir nun aufser den Argumenten u und v oder $2v$ noch die Argumente a und $2b$ und beziehen also die Functionen des Arguments a auf den Modul k, also auf k', wenn der conjugirte Modul genommen werden soll, und die Functionen des Arguments $2b$ auf den Modul λ, also auf λ', wenn der conjugirte Modul zu nehmen ist, so ist nach §. 251.

$$\frac{Hl(2v\pm 2b)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}}.Hl(u\pm a).Gl(u\pm a),$$

und hieraus folgt

$$\log\frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)} = \log\sqrt{\frac{Hl(u+a)}{Hl(u-a)}} - \log\sqrt{\frac{Gl(a-u)}{Gl(a+u)}}.$$

Ferner ist $H(2b) = \frac{H(a)-G(a)}{1+k'}$, also $2v.H(2b) = u.H(a) - u.G(a)$. Da auch

$$\mathfrak{S}(2v,2b) = 2v.H(2b) - \log\sqrt{\frac{Hl(2b+2v)}{Hl(2b-2v)}},$$

$$\mathfrak{S}(u,a) = u.H(a) - \log\sqrt{\frac{Hl(a+u)}{Hl(a-u)}} \text{ und}$$

$$\mathfrak{S}(u,K-a) = u.G(a) - \log\sqrt{\frac{Gl(a-u)}{Gl(a+u)}}$$

ist, so hat man

$$1.\quad \mathfrak{S}(2v,2b) = \mathfrak{S}(u,a) - \mathfrak{S}(u,K-a).$$

Ganz eben so findet man die Formel

$$2.\quad \mathfrak{S}(2v,2b) = \mathfrak{C}(u,K-a) - \mathfrak{C}(u,a),$$

und $\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{D}(u,K-a) = -2v.A(2b) + \log\sqrt{\frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)}}$, da $u.A(a) - u.B(a) = (1+k')u.A(2b) = 2v.A(2b)$ ist. Da aber nach §. 200. $-A(2b) = B(2b) - \frac{1}{\text{sn}\,2b\,\text{snc}\,2b}$ ist, so folgt

$$\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{D}(u,K-a) = -\frac{2v}{\text{sn}\,2b\,\text{snc}\,2b} + 2v.B(2b) + \log\sqrt{\frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)}}, \text{ oder}$$

$$3.\quad \mathfrak{D}(2v,2b) - \frac{2v}{\text{sn}\,2b\,\text{snc}\,2b} = \mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{D}(u,K-a).$$

In diesen Formeln ist $2b = (1+k').a$, so wie $2v = (1+k').u$. Aus der Formel (3.) §. 251. folgt

$$\log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}} - \log\sqrt{\frac{Bl(a-u)}{Bl(a+u)}};$$

aufserdem ist

$$'\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.A(a) + \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{C}(u, K-a) = -u.H(a) + \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}} \text{ und}$$

$$'\mathfrak{D}(u, K-a) = u.G(a) + \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}};$$

gemäfs §. 203. Daher erhalten wir

$$'\mathfrak{S}(u, K-a) + u.A(a) - '\mathfrak{S}(u, a) - u.B(a)$$

$$= \log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{S}(u, K-a) - '\mathfrak{S}(u, a) + 2v.A(2b),$$

oder auch

$$4. \quad '\mathfrak{S}(u, K-a) - '\mathfrak{S}(u, a) = '\mathfrak{S}(2v, L-2b).$$

Ferner ist $\log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{C}(u, K-a) + u.H(a) - '\mathfrak{C}(u, a) - u.G(a)$
$= '\mathfrak{C}(u, K-a) - '\mathfrak{C}(u, a) + 2v.H(2b)$ und also

$$5. \quad '\mathfrak{C}(u, K-a) - '\mathfrak{C}(u, a) = '\mathfrak{C}(2v, L-2b).$$

Endlich findet sich $\log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{D}(u, K-a) - u.G(a) - '\mathfrak{D}(u, a) + u.H(a)$
$= '\mathfrak{D}(u, K-a) - '\mathfrak{D}(u, a) + 2v.H(2b)$, oder

$$6. \quad '\mathfrak{D}(u, K-a) - '\mathfrak{D}(u, a) = '\mathfrak{C}(2v, L-2b).$$

§. 253.

Summen oder Unterschiede der Modular-Integrale von der ersten und dritten Classe, deren Parameter sich zum conjugirten Modular-Quadranten ergänzen.

Im elften Abschnitte wurden zahlreiche Formeln entwickelt, durch welche Modular-Integrale von der ersten und dritten Classe, deren Parameter sich zum conjugirten Quadranten ergänzen, mittels eines cyklischen Arcus auf einander zurückgeführt werden. Kann die *Summe* solcher Integrale durch einen cyklischen Arcus ausgedrückt werden, so kann ihr *Unterschied* auf ein einziges solches Integral zurückgeführt werden: kann im Gegentheil ihr *Unterschied* durch einen cyklischen Arcus ausgedrückt werden, so kann ihre *Summe* durch ein einziges Integral dargestellt werden; wie es nun gezeigt werden soll. Da $K-ai = -i(a+iK)$ ist, so verwandelt sich die Gleichung (1.) §. 252., wenn darin ai statt a und bi statt b gesetzt wird, zunächst in $S(2v, 2b) = S(u, a) + S(u, a+iK)$, und da nach §. 132. $S(u, a+iK) = -'S(u, K'-a)$ ist, so ergiebt sich

$$1. \quad S(u, a) - 'S(u, K'-a) = S(2v, 2b) \text{ für } a < \tfrac{1}{2}K',$$

und aus den Formeln §. 206. findet man

$$S(u, a) + 'S(u, K'-a) = \frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$



Die Formel (2.) §. 252. verwandelt sich zunächst in $S(2v,2b) = -C(u,a+iK)-C(u,a)$, und da $C(u,a+iK) = -\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.u+{}'C(u,K'-a)$ ist, so folgt

$$2.\quad \frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.u-C(u,a)-{}'C(u,K'-a) = S(2v,2b),$$

und aus den Formeln §. 206. findet man

$$'C(u,K'-a)-C(u,a) = (k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a)u-\text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (3.) §. 252. giebt zunächst $D(2v,2b)+\frac{2v.\text{dn}'2b}{\text{tn}'2b} = D(u,a)+D(u,a+iK)$, und da $D(u,a+iK) = {}'D(u,K'-a)$ ist, so erhält man

$$3.\quad D(u,a)+{}'D(u,K'-a) = \frac{\lambda\,\text{cn}'2b}{\text{cnc}'2b}.2v+D(2v,2b),$$

und die Formeln §. 206. geben

$$'D(u,K'-a)-D(u,a) = \frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}.u-\text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Da $L' = (1+k').K'$ und $2b = (1+k')a$ ist, so ist $L'-2b = (1+k')(K'-a)$. Setzt man also $K'-a$ statt a in den vorigen Formeln, so verwandelt sich $2b$ in $L'-2b$ und wir erhalten

$$4.\quad S(u,K'-a)-{}'S(u,a) = S(2v,L'-2b) \text{ und}$$

$$S(u,K'-a)+{}'S(u,a) = \frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}.u-\text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (2.) verwandelt sich in

$$5.\quad \frac{\text{snc}'a}{\text{sn}'a}.u-C(u,K'-a)-{}'C(u,a) = S(2v,L'-2b) \text{ und es ist}$$

$$'C(u,a)-C(u,K'-a) = (k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a).u-\text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (3.) verwandelt sich in

$$6.\quad D(u,K'-a)+{}'D(u,a) = \frac{\lambda\,\text{cnc}'2b}{\text{cn}'2b}.2v+D(2v,L'-2b)$$

und es ist $'D(u,a)-D(u,K'-a) = \frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.u-\text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right)$.

In diesen Formeln ist

$$\text{sn}\,2v = (1+k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u \quad\text{und}\quad \text{tn}'2b = (1+k').\frac{\text{tn}'a}{\text{dn}'a} = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\frac{\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.$$

Man darf auch nach §. 83. in den Formeln (1—3.) §. 252. λ mit k' und λ' mit k vertauschen, wenn man v statt u, also b statt a, und $\frac{1}{2}u$ statt v, also $\frac{1}{2}a$ statt b setzt. Hierdurch verwandeln sich jene Formeln in

$\mathfrak{S}'(u,a) = \mathfrak{S}'(v,b) - \mathfrak{S}'(v,L'-b)$, $\mathfrak{S}'(u,a) = \mathfrak{C}'(v,L'-b) - \mathfrak{C}'(v,b)$ und

$$\mathfrak{D}'(u,a) - \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} = \mathfrak{D}'(v,b) - \mathfrak{D}'(v,L'-b).$$

Setzt man in diesen Formeln noch vi statt v und ui statt u, so giebt die erste

$$7.\quad 'S(v,b) - 'S(v,L'-b) = 'S(u,a) \quad \text{für} \quad b < \tfrac{1}{2}L',$$

und die Formeln §. 206. geben für die Summe:

$$'S(v,b) + 'S(v,L'-b) = \text{arc tang}\left(\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b.\frac{\text{tn}\,v}{\text{dn}\,v}\right) - (\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b).v.$$

Die zweite Gleichung giebt

$$8.\quad 'C(v,L'-b) - 'C(v,b) = 'S(u,a),$$

und die Formeln §. 206. geben

$$'C(v,L'-b) + 'C(v,b) = \text{arc tang}\left(\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b.\frac{\text{tn}\,v}{\text{dn}\,v}\right) + (\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b).v.$$

Ferner hat man

$$9.\quad 'D(v,b) - 'D(v,L'-b) = 'D(u,a) - \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a},$$

und die Formeln §. 206. geben

$$'D(v,b) + 'D(v,L'-b) = \frac{v}{\text{sn}'b\,\text{snc}'b} + \text{arc tang}\left(\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b.\frac{\text{tn}\,v}{\text{dn}\,v}\right).$$

Vertauschen wir auch in den Formeln (4., 5., 6.) §. 252. λ mit k' und λ' mit k, indem wir v statt u, b statt a, $\frac{1}{2}u$ statt v und $\frac{1}{2}a$ statt b setzen, so verwandeln sie sich zunächst in

$$'\mathfrak{S}'(v,L'-b) - '\mathfrak{S}'(v,b) = '\mathfrak{S}'(u,K'-a),$$
$$'\mathfrak{C}'(v,L'-b) - '\mathfrak{C}'(v,b) = '\mathfrak{C}'(u,K'-a) \quad \text{und}$$
$$'\mathfrak{D}'(v,L'-b) - '\mathfrak{D}'(v,b) = '\mathfrak{C}'(u,K'-a).$$

Setzen wir nun noch vi statt v und ui statt u, so erhalten wir

$$10.\quad S(v,L'-b) - S(v,b) = S(u,K'-a) \quad \text{für} \quad b < \tfrac{1}{2}L',$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$S(v,L'-b) + S(v,b) = \frac{v}{\text{sn}'b\,\text{snc}'b} - \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{sn}'b\,\text{snc}'b}\cdot\frac{\text{tn}\,v}{\text{dn}\,v}\right).$$

Ferner ist

$$11.\quad C(v,L'-b) - C(v,b) = C(u,K'-a),$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$C(v,L'-b) + C(v,b) = -(\lambda'^2\,\text{sn}'b\,\text{snc}'b).v + \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{sn}'b\,\text{snc}'b}\cdot\frac{\text{tn}\,v}{\text{dn}\,v}\right).$$

Endlich ist noch

$$12.\quad D(v,L'-b) - D(v,b) = C(u,K'-a),$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$D(v, L'-b)+D(v,b) = (\lambda'^2 \operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b).v + \operatorname{arc tang}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b}\right).\left(\frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v}\right).$$

Den Zusammenhang zwischen den Argumenten u und v und ihren Modular-Functionen, ferner zwischen den Moduln und den ihnen zugehörigen Modular-Quadranten drücken die Formeln §. 51 – 54. aus; der Zusammenhang zwischen a und b aber ist so beschaffen, dafs man nur ai statt u und bi statt v zu setzen hat. Hiernach ist also $\operatorname{tn}(ai) = (1+\lambda)\frac{\operatorname{tn}(bi)}{\operatorname{dn}(bi)}$ oder $\operatorname{sn}' a = (1+\lambda) \operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b$ und rückwärts $\operatorname{sn}(bi) = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}(ai)}{1+\operatorname{dn}(ai)}}$ oder $\operatorname{tn}' b = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}' a}{1+\operatorname{snc}' a}}$ oder auch $\sqrt{\lambda}.\operatorname{tn}' b = \sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}' a}{1+\operatorname{snc}' a}}$.

Die Formeln (1 — 12.) finden vielfache Anwendung in der Geometrie und Mechanik. Setzt man in den Formeln (10 — 12.) noch ai statt a und bi statt b, so erhält man entsprechende Relationen unter den Modular-Integralen der zweiten und vierten Classe, die wir aber der Kürze wegen übergehen.

(Die Fortsetzung folgt.)

15.

Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen.

(Von dem Herrn Prof. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

Bekanntlich hat zuerst *Lagrange* die vollständige algebraische Integralgleichung, welche der Differentialgleichung

$$1.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}=\frac{\partial x}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}$$

Genüge leistet und die von *Euler* auf einem indirecten Wege gefunden war, vermittelst einer eigenthümlichen Methode direct abgeleitet und im 11. Capitel der Theorie der Functionen auseinandergesetzt. Es ist mir gelungen, diese schöne Integrationsmethode in der Art zu erweitern, dafs ich dadurch ein System von Differentialgleichungen auf ähnliche Weise integrire. Dieses System gehört zu denjenigen, deren vollständige algebraische Integralgleichungen, wie Hr. Prof. *Jacobi*, im 9ten Bande dieses Journals S. 402, zuerst bemerkt hat, in dem *Abel*schen Theoreme enthalten sind, während ihre Integralgleichungen in transcendenter Gestalt sich aus der Form der Differentialgleichungen, in denen die Variabeln separirt sind, von selbst ergeben. Ja, man kann das von *Abel* befolgte Verfahren als eine indirecte Integration des Systems Differentialgleichungen ansehen.

Demungeachtet wird die directe Integrationsmethode, welche ich hier mittheile, nicht uninteressant sein, und ich werde, um die Analogie mit der *Lagrange*schen deutlich hervortreten zu lassen, letztere dem Wesentlichen nach zuerst darstellen.

§. 1.

Ich setze der Kürze wegen

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=fx,$$

so dafs die Gleichung (1.) in folgende übergeht:

$$2.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{(fy)}}=\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}}.$$

Man kann nun y und x als solche Functionen von t betrachten, welche durch die Gleichungen

$$3.\quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{(fy)},\quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(fx)}$$

bestimmt werden; denn durch diese Annahme geschieht der Gleichung (2.) Genüge. Führt man nun aufserdem die Variabeln p und q ein, und zwar durch die Gleichungen

$$4.\quad y+x = p,\quad y-x = q,$$

so ergeben sich sogleich aus (3. und 4.) die Ausdrücke für $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ wie folgt:

$$5.\quad \frac{\partial p}{\partial t} = \sqrt{(fy)}+\sqrt{(fx)},\quad \frac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{(fy)}-\sqrt{(fx)},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \tfrac{1}{2}(f'y+f'x).$$

Lagrange setzt hieraus die Gleichung

$$6.\quad q\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial p}{\partial t} = \tfrac{1}{2}(f'y+f'x)(y-x)-(fy-fx)$$

zusammen, und zeigt durch Ausführung der Rechnung, dafs der rechte Theil derselben durch q^3 ohne Rest theilbar ist. Man sieht dies leicht ohne Rechnung auf folgende Weise ein. Setze ich nämlich

$$F(x,y) = \tfrac{1}{2}(y-x)(f'y+f'x)-(fy-fx),$$

so erhalte ich

$$F'y = \tfrac{1}{2}(y-x)f''y-\tfrac{1}{2}(f'y-f'x),\quad F''y = \tfrac{1}{2}(y-x)f'''y;$$

welche drei Ausdrücke für $y = x$ verschwinden, und daher zeigen, dafs $F(x,y)$ durch $(y-x)^3$ oder q^3 theilbar ist. Da nun $F(x,y) = -F(y,x)$ ist und den 4ten Grad in Bezug auf keine der beiden Variabeln überschreitet, so erhält man durch Vergleichung der Coëfficienten der beiden höchsten Potenzen von y,

$$F(x,y) = (y-x)^3\{E(x+y)+\tfrac{1}{2}D\},$$

und durch Substitution in die Formel (6.):

$$q\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial p}{\partial t} = q^3\{Ep+\tfrac{1}{2}D\}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort folgende Gleichung:

$$7.\quad \frac{2\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{q}\left\{\frac{q\,\partial\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)-\frac{\partial p}{\partial t}\partial q}{q^2}\right\} = 2Ep\,\partial p+D\,\partial p,$$

welche, auf beiden Seiten integrirt, auf folgende Gleichung führt:

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{q}\right) - Ep^2 - Dp = \text{Constans}.$$

Substituirt man nun endlich in dieser Gleichung die Formeln (4. und 5.), so erhält man folgende vollständige Integralgleichung der Differentialgleichung (2.):

$$8. \quad \left\{\frac{\sqrt{(fy)}+\sqrt{(fx)}}{y-x}\right\}^2 - E(x+y)^2 - D(x+y) = \text{Constans}.$$

§. 2.

Ich werde jetzt das System der beiden Differentialgleichungen

$$9. \quad \frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}} + \frac{\partial y}{\sqrt{(fy)}} + \frac{\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0, \quad \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(fx)}} + \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(fy)}} + \frac{z\,\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0$$

betrachten, worin der Kürze wegen gesetzt ist:

$$10. \quad fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6.$$

Man kann die drei Variabeln x, y, z als Functionen einer vierten t ansehen, welche durch die Gleichungen

$$11. \quad \frac{\partial x}{\partial t} = (y-z)\sqrt{(fx)}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = (z-x)\sqrt{(fy)}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = (x-y)\sqrt{(fz)}$$

bestimmt wird, weil dadurch den beiden gegebenen Gleichungen Genüge geschieht. Führt man nun außerdem die Größen

$$12. \quad \xi = y-z, \quad \upsilon = z-x, \quad \zeta = x-y, \quad p = x+y+z$$

ein, so erhält man folgende Formeln:

$$13. \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \upsilon\sqrt{(fy)} - \zeta\sqrt{(fz)}, \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \zeta\sqrt{(fz)} - \xi\sqrt{(fx)}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \xi\sqrt{(fx)} - \upsilon\sqrt{(fy)}; \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \xi\sqrt{(fx)} + \upsilon\sqrt{(fy)} + \zeta\sqrt{(fz)}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = [\upsilon\sqrt{(fy)} - \zeta\sqrt{(fz)}]\sqrt{(fx)} + [\zeta\sqrt{(fz)} - \xi\sqrt{(fx)}]\sqrt{(fy)} \\ \qquad + [\xi\sqrt{(fx)} - \upsilon\sqrt{(fy)}]\sqrt{(fz)} + \frac{1}{2}[\xi^2 f'x + \upsilon^2 f'y + \zeta^2 f'z], \\ \frac{\partial(\xi.\upsilon.\zeta)}{\partial t} = \upsilon\zeta[\upsilon\sqrt{(fy)} - \zeta\sqrt{(fz)}] + \zeta\xi[\zeta\sqrt{(fz)} - \xi\sqrt{(fx)}] \\ \qquad + \xi\upsilon[\xi\sqrt{(fx)} - \upsilon\sqrt{(fy)}]. \end{cases}$$

Man bilde nun folgenden Ausdruck:

$$\xi.\upsilon.\zeta.\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial(\xi.\upsilon.\zeta)}{\partial t}.\frac{\partial p}{\partial t},$$

und führe der Analogie wegen $q=\xi.\upsilon.\zeta$ ein, so erhält man, mit Benutzung der Gleichung (12.), nach leichten Reductionen, die Gleichung

$$15.\quad q\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial p}{\partial t}$$
$$=\tfrac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y)[(y-z)^2f''x+(z-x)^2f''y+(x-y)^2f''z]$$
$$+(y-z)^3(2x-y-z)fx+(z-x)^3(2y-z-x)fy+(x-y)^3(2z-x-y)fz.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist eine sogenannte alternirende Function der Variabeln x, y, z, welche in Bezug auf keine derselben den 7ten Grad übersteigt. Vertauscht man nämlich z. B. x und y, so geht der Ausdruck in einen andern über, welcher ihm sonst gleich, aber entgegengesetzt ist. Ich schliefse hieraus, dafs derselbe durch eine ungerade Potenz des Products

$$(y-z)(z-x)(x-y)$$

theilbar ist. Wenn man ihn nun nach x partiell differentiirt und diejenigen Glieder des Differentials wegläfst, welche in $(x-y)$ multiplicirt sind, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(y-z)(z-x)[(z-x)^2f''y-(y-z)f''x]+2(y-z)^3fx-3(y-z)(z-x)^2fy$$
$$-(z-x)^3fy.$$

Diese Glieder verschwinden für $x=y$, und daher ist die rechte Seite der Gleichung (15.), weil ihr partielles Differential nach x, den Factor $(x-y)$ besitzt, durch $(x-y)^2$ theilbar. Man schliefst hieraus sehr leicht, dafs die ungerade Potenz des Products

$$(y-z)(z-x)(x-y),$$

welche in dem erwähnten Ausdrucke aufgeht, die *dritte* ist, und dafs derselbe die Form annimmt:

$$(y-z)^3(z-x)^3(x-y)^3(M(x+y+z)+N).$$

Für die Coëfficienten M und N findet man endlich durch Vergleichung der Glieder von den beiden höchsten Dimensionen in Bezug auf eine der Variabeln, z. B. x, mit Hinzuziehung von (10.):

$$M=G,\quad N=\tfrac{1}{2}F.$$

Aus der Gleichung (15.) geht hienach folgende, mit der Gleichung (7.) ganz analoge Differentialgleichung hervor:

$$\frac{2.\frac{\partial p}{\partial t}}{q}\left\{\frac{q\,\partial\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)-\frac{\partial p}{\partial t}.\partial q}{q^2}\right\} = 2Gp\partial p+F\partial p,$$

welche, auf beiden Seiten integrirt, zu folgender Gleichung führt:

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{q^2}-Gp^2-Fp = \text{Constans}.$$

Man substituire hierin nun die Werthe für p, q, $\frac{\partial p}{\partial t}$, welche sich aus den Gleichungen (12. und 14.) ergeben, so gelangt man zur folgenden „vollständigen algebraischen Integralgleichung der Differentialgleichungen

$$„\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\frac{\partial y}{\sqrt{(fy)}}+\frac{\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0, \quad \frac{x\partial x}{\sqrt{(fx)}}+\frac{y\partial y}{\sqrt{(fy)}}+\frac{z\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0:$$

17. $$„\left\{\frac{(y-z)\sqrt{(fx)}+(z-x)\sqrt{(fy)}+(x-y)\sqrt{(fz)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2-F(x+y+z)$$
$$-G(x+y+z)^2 = \text{Const.}$$

Hieraus geht auch sogleich von selbst hervor, dafs die Function

$$v = \left\{\frac{(y-z)\sqrt{(fx)}+(z-x)\sqrt{(fy)}+(x-y)\sqrt{(fz)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2-F(x+y+z)-G(x+y+z)^2$$

eine Lösung der den beiden gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechenden partiellen

18. $$(y-z)\sqrt{(fx)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(z-x)\sqrt{(fy)}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(x-y)\sqrt{(fz)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

ist.

§. 3.

Die Differentialgleichung (2.) geht durch die Substitution von

$$x = \frac{1}{x_1}, \quad y = \frac{1}{y_1}$$

in folgende über:

$$\frac{\partial y_1}{\sqrt{(Fy_1)}} = \frac{\partial x_1}{\sqrt{(Fx_1)}},$$

wenn $Fx = Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ gesetzt wird. Die Integralgleichung der letztern ist nun nach der Gleichung (8.), wenn man nur dort statt y, x, f; y_1, x_1, F einführt:

$$\left(\frac{\sqrt{(Fy_1)}+\sqrt{(Fx_1)}}{y_1-x_1}\right)^2-A(y_1+x_1)^2-B(y_1+x_1) = \text{Const.}$$

Man kann daher schliefsen, dafs die hieraus durch die umgekehrte Substitution

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{1}{y},$$

hervorgehende endliche Gleichung:

$$19.\quad \left\{\frac{x^2\surd(fy)+y^2\surd(fx)}{xy(y-x)}\right\}^2-A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\text{Const.}$$

der Differentialgleichung (2.) Genüge leistet. Ganz auf dieselbe Weise kehren durch die Substitution von

$$x=\frac{1}{x_1},\quad y=\frac{1}{y_1},\quad z=\frac{1}{z_1}$$

die Differentialgleichungen (9.) in dieselbe Form zurück, nämlich in:

$$\frac{x_1\,\partial x_1}{\surd(Fx_1)}+\frac{y_1\,\partial y_1}{\surd(Fy_1)}+\frac{z_1\,\partial z_1}{\surd(Fz_1)}=0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\surd(Fx_1)}+\frac{\partial y_1}{\surd(Fy_1)}+\frac{\partial z_1}{\surd(Fz_1)}=0,$$

wo $Fx=Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+G$ gesetzt ist, und es ergiebt sich daher eben so die Gleichung

$$20.\quad \left\{\frac{y^2z^2(y-z)\surd(fx)+z^2x^2(z-x)\surd(fy)+x^2y^2(x-y)\surd(fz)}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2$$
$$-B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\text{Const.}$$

als eine Integralgleichung der Differentialgleichungen (9.), oder, wenn v statt Const. gesetzt wird, als eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (18.).

Es findet jedoch zwischen den hier auf dieselbe Weise gefundenen neuen Integralgleichungen (19.) und (20.) ein grofser Unterschied in Bezug auf ihre Natur statt. Denn die erstere mufs, weil eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln nur *eine* vollständige Integralgleichung hat, von welcher alle in anderer Form erscheinenden abhängig sind, die Eigenschaft besitzen, dafs ihr linker Theil eine Function des linken Theils der Gleichung (8.) ist. Dies ergiebt sich auch durch eine leichte Rechnung. Zieht man nemlich beide Ausdrücke von einander ab, so erhält man die Differenz

$$\left(\frac{y+x}{y-x}\right)\frac{x^2fy-y^2fx}{x^2y^2}+A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2+B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-D(x+y)-E(x+y)^2,$$

welche nach der Substitution der Ausdrücke für fx und fy identisch verschwindet und daher die Identität beider Integralgleichungen (8.) und (19.) darthut. Ein anderes Verhältnifs waltet zwischen den Integralgleichungen (17.) und (20.) ob. Ich behaupte, dafs dieselben von einander unabhängig sind, oder, was dasselbe ist, dafs die hieraus hervorgehenden Lösungen der partiellen Differentialgleichung (18.) nicht Functionen einer dritten Lösung

sind. Man ersieht dies sehr leicht aus besonderen Fällen. Setzt man nemlich $G = 0$, und $x = \infty$, so gehen die beiden Lösungen in folgende über:

$$E + F(z+y)$$

und

$$\left\{\frac{y^2\sqrt{(fz)} - z^2\sqrt{(fy)}}{yz.(y-z)}\right\}^2 - B\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - A\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

von denen die erste eine Function von $(z+y)$, die zweite eine Function von $z+y$ und $z.y$ ist. Es geht hieraus hervor, dafs die letztere nicht eine Function der ersteren sein kann, und hieraus schliefst man sogleich, dafs die obigen Integralgleichungen (17.) und (20.) von einander unabhängig sind. Hiernach erhält man folgendes Theorem.

„Das System der beiden Differentialgleichungen

$$„\frac{\partial x}{\sqrt{(fx)}} + \frac{\partial y}{\sqrt{(fy)}} + \frac{\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0,$$

$$„\frac{x\partial x}{\sqrt{(fx)}} + \frac{y\partial y}{\sqrt{(fy)}} + \frac{z\partial z}{\sqrt{(fz)}} = 0$$

„wird vollständig integrirt durch das System der beiden algebraischen „Gleichungen

$$„\left\{\frac{(y-z)\sqrt{(fx)} + (z-x)\sqrt{(fy)} + (x-y)\sqrt{(fz)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2 - F(x+y+z) - G(x+y+z)^2 = C_1,$$

$$„\left\{\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{(fx)} + z^2x^2(z-x)\sqrt{(fy)} + x^2y^2(x-y)\sqrt{(fz)}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2$$

$$-B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = C_2,$$

„wenn der Kürze wegen

$$„fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6$$

„gesetzt wird, wo A, B, C etc. constante Gröfsen sind. Oder, die allgemeine Auflösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$„(y-z)\sqrt{(fx)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (z-x)\sqrt{(fy)}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + (x-y)\sqrt{(fz)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

„ist eine willkürliche Function zwischen den beiden Ausdrücken

$$„\left\{\frac{(y-z)\sqrt{(fx)} + (z-x)\sqrt{(fy)} + (x-y)\sqrt{(fz)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2 - F(x+y+z) - G(x+y+z)^2$$

„und

$$\left\{\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{(fx)} + z^2x^2(z-x)\sqrt{(fy)} + x^2y^2(x-y)\sqrt{(fz)}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right\}^2$$

$$-B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2."$$

§. 4.

Die in §. 2. dargestellte Methode, eine Integralgleichung eines Systems Differentialgleichungen aufzufinden, läfst sich eben so bei folgendem allgemeinen Systeme benutzen und ohne grofse Rechnung durchführen. Ich meine die Differentialgleichungen

$$21.\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0,\\ \frac{x_1\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{x_2\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{x_n\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{x_1^{n-2}\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{x_2^{n-2}\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{x_n^{n-2}\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0, \end{cases}$$

worin der Kürze wegen gesetzt ist:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_{2n}x^{2n}=fx.$$

Ich werde jedoch statt dessen eine etwas einfachere Art der Integration für diesen allgemeinen Fall vortragen, bei welcher die Analogie mit der *Lagrange*schen nicht so deutlich hervortreten wird. Führt man die Function Fx durch die Gleichung

$$Fx=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

ein, so geht das vorliegende System Gleichungen in folgendes über:

$$\partial x_1:\partial x_2:\dots:\partial x_n=\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}:\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}:\dots:\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n},$$

welches, in das obige substituirt, bekannte identische Gleichungen hervorruft. Man kann jetzt wieder $x_1, x_2, \dots x_n$ als Functionen einer Variabeln t ansehn, welche die Gleichungen

$$22.\quad \frac{\partial x_1}{\partial t}=\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1},\quad \frac{\partial x_2}{\partial t}=\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2},\ \dots\ \frac{\partial x_n}{\partial t}=\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}$$

erfüllen. Differentiirt man diese Gleichungen nach t und benutzt sie wieder in den Ausdrücken des Differentials, so erhält man folgende:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\frac{fx_1}{F'x_1^2}\right)}{\partial x_1}\right)+\frac{\sqrt{(fx_1 fx_2)}}{F'x_1 F'x_2}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{(fx_1 fx_3)}}{F'x_1 F'x_3}\cdot\frac{1}{x_1-x_3}+\dots$$
$$\dots+\frac{\sqrt{(fx_1 fx_n)}}{F'x_1 F'x_n}\cdot\frac{1}{x_1-x_n},$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \frac{f x_2}{(F' x_2)^2}}{\partial x_2}\right) + \frac{\sqrt{(f x_2 f x_1)}}{F' x_2 F' x_1} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{\sqrt{(f x_2 f x_3)}}{F' x_2 F' x_3} \cdot \frac{1}{x_2 - x_3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sqrt{(f x_2 f x_n)}}{F' x_2 F' x_n} \cdot \frac{1}{x_2 - x_n},$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \frac{f x_n}{(F' x_n)^2}}{\partial x_n}\right) + \frac{\sqrt{(f x_n f x_1)}}{F' x_n F' x_1} \cdot \frac{1}{x_n - x_1} + \frac{\sqrt{(f x_n f x_2)}}{F' x_n F' x_2} \cdot \frac{1}{x_n - x_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sqrt{(f x_n f x_{n-1})}}{F' x_n F' x_{n-1}} \cdot \frac{1}{x_n - x_{n-1}}.$$

Addirt man dieselben und setzt der Kürze wegen

$$23. \quad p = x_1 + x_2 \ldots + x_n,$$

so erhält man, da die übrigen Glieder sich zu je zweien aufheben:

$$24. \quad 2\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \frac{f x_1}{(F' x_1)^2}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial \frac{f x_2}{(F' x_2)^2}}{\partial x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial \frac{f x_n}{(F' x_n)^2}}{\partial x_n}\right);$$

eben so wie aus (22.):

$$25. \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sqrt{(f x_1)}}{F' x_1} + \frac{\sqrt{(f x_2)}}{F' x_2} + \ldots + \frac{\sqrt{(f x_n)}}{F' x_n}.$$

Ich zerlege jetzt den Bruch $\frac{f x}{(F x)^2}$ in Partialbrüche und erhalte nach bekannten Formeln:

$$\frac{f x}{(F x)^2} - A_{2n} = \left\{\begin{array}{l} \frac{f x_1}{(F' x_1)^2} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{f x_n}{F' x_n} \cdot \frac{1}{(x - x_n)^2} \\ + \left(\frac{\partial \frac{f x_1}{(F' x_1)^2}}{\partial x_1}\right) \frac{1}{x - x_1} + \ldots + \left(\frac{\partial \frac{f x_n}{(F' x_n)^2}}{\partial x_n}\right) \frac{1}{x - x_n} \end{array}\right\}.$$

Nimmt man in dieser identischen Gleichung auf beiden Seiten den Coëfficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwicklung nach fallenden Potenzen von x, oder, was dasselbe ist, das Residu, so erhält man die Formel

$$A_{2n-1} + 2A_{2n} p = \left(\frac{\partial \frac{f x_1}{(f' x_1)^2}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial \frac{f x_2}{(F' x_2)^2}}{\partial x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial \frac{f x_n}{(F' x_n)^2}}{\partial x_n}\right).$$

Hienach giebt die Formel (24.), mit ∂p multiplicirt, die Gleichung

$$A_{2n-1}\,\partial p + 2A_{2n}\,p\,\partial p = 2\partial\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial t},$$

welche die Integration zuläſst und auf die Gleichung

$$A_{2n-1}p + A_{2n}p^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2,$$

oder nach Substitution der Formeln (23.) und (25.) auf folgende eine der vollständigen Integralgleichungen des Systems (21.) führt:

$$26. \quad \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right\}^2$$
$$-A_{2n-1}(x_1 + x_2 \dots + x_n) - A_{2n}(x_1 + x_2 \dots + x_n)^2 = \text{Const.}$$

Setzt man statt Const., v, so erhält man hiedurch zugleich eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$27. \quad \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \dots \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dafs dieses Resultat mit den frühern übereinstimmt, in welchen $n = 2$ und $n = 3$ war, und dafs auch die Gleichung

$$28. \quad \left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1^2 F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{x_2^2 F'x_2} \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n^2 F'x_n}\right\}^2 x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$$
$$-A_1\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) - A_0\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)^2 = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung des Systems (21.) ist.

§. 5.

Es wird nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie man aus dem *Abel*schen Theorem dieselbe Integralgleichung (26.) ableiten kann, welche im Vorigen durch directe Integration gefunden ist. Ich setze zu dem Ende nach der oben angeführten Abhandlung des Herrn Prof. *Jacobi* voraus, dafs durch das genannte Theorem das System Differentialgleichungen (20.) vollständig algebraisch integrirt wird, und will daher von folgendem leicht zu erweisenden Satze ausgehen.

„Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$29. \quad (a_0 + a_1 x + \dots - a_n x^n)^2 - b^2(A_0 + A_1 x \dots + A_{2n} x^{2n}) = 0$$

„durch $x_1, x_2, \dots x_n, m_1, m_2, \dots m_n$ bezeichnet und die Coëfficienten „$a_0, a_1, \dots a_n, b$ durch die $n+1$ ersten dieser Wurzeln bestimmt werden, „so sind die $n-1$ Bedingungsgleichungen, welche sich dafür ergeben, dafs „auch die $n-1$ letzten Gröfsen $m_2, m_3, \dots m_n$ Wurzeln dieser Gleichung „seien, die $n-1$ vollständigen, mit den $n-2$ willkürlichen Constanten „$m_2, m_3, \dots m_n$ behafteten algebraischen Integralgleichungen des Systems „Differentialgleichungen

$$30.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \dfrac{\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \dfrac{\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \dfrac{x_1 \partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \dfrac{x_2 \partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \dfrac{x_n \partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1^{n-2} \partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}} + \dfrac{x_2^{n-2} \partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}} + \dots + \dfrac{x_n^{n-2} \partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}} = 0, \end{cases}$$

„worin $fx = A_0 = A_1 x + \dots A_{2n} x^{2n}$ gesetzt ist."

Man sieht hieraus, dafs es auf die Elimination der Gröfsen a_0, a_1, ... a_n, b aus den Gleichungen

$$31.\quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 \dots + a_n x_1^n = b\sqrt{(fx_1)}, \\ a_0 + a_1 x_2 \dots + a_n x_2^n = b\sqrt{(fx_2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n \dots + a_n x_n^n = b\sqrt{(fx_n)}; \end{cases}$$

$$32.\quad \begin{cases} a_0 + a_1 m_1 + \dots a_n m_1^n = b\sqrt{(fm_1)}, \\ a_0 + a_1 m_2 + \dots a_n m_2^n = b\sqrt{(fm_2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 m_n + \dots a_n m_n^n = b\sqrt{(fm_n)} \end{cases}$$

ankommt. Zu bemerken ist, dafs die n Wurzelzeichen in (31.) und das erste in (32.) willkürlich angenommen werden können, die übrigen aber dadurch bedingt sind. Die nach der Elimination übrig bleibenden $n-1$ Gleichungen sind die gesuchten Integralgleichungen. Ich werde jetzt, um gerade zu der *oben gefundenen* Integralgleichung zu gelangen, diese Elimination folgendermaafsen anstellen.

Ich multiplicire die Gleichungen (31.) respective mit den Factoren

$$\frac{1}{F'x_1} \cdot \frac{1}{x - x_1}, \quad \frac{1}{F'x_2} \cdot \frac{1}{x - x_2}, \quad \dots \quad \frac{1}{F'x_n} \cdot \frac{1}{x - x_n},$$

worin $Fx = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ gesetzt ist, und addire die sämmtlichen Producte, so erhalte ich, nach leichten Reductionen,

$$34.\quad \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{Fx}$$

$$= a_n + b\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} \cdot \frac{1}{x - x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \cdot \frac{1}{x - x_2} + \dots \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n} \cdot \frac{1}{x - x_n}\right\}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung auf beiden Seiten den Coëfficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung nach fallenden Potenzen von x, so erhält man die Gleichung



$$35.\quad a_{n-1}+a_n(x_1+x_2+\ldots x_n)=b\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right\},$$

und eben so, wenn man

$$\psi n=(m-m_1)(m-m_2)\ldots(m-m_n)$$

setzt, aus den letzten Gleichungen (32.) folgende:

$$36.\quad a_{n-1}+a_n(m_1+m_2+\ldots+m_n)=b\left\{\frac{\sqrt{(fm_1)}}{\psi' m_1}+\frac{\sqrt{(fm_2)}}{\psi' m_2}+\ldots+\frac{\sqrt{(fm_n)}}{\psi' m_n}\right\}.$$

Anderseits folgt aber aus den Gleichungen (31.) und (32.), dafs die Gleichung

$$37.\quad (a_0+a_1x+\ldots a_nx^n)^2-b_2(A_0+A_1x+\ldots+A_{2n}x^{2n})=0$$

die Wurzeln x_1, x_2, ... x_n, m_1, m_2, ... m_n hat; wie auch aus dem vorigen Satze sich von selbst ergiebt, und man hat daher die Gleichung

$$2a_{n-1}a_n-b^2A_{2n-1}=(b^2A_{2n}-a_n^2)(x_1+x_2+\ldots x_n+m_1+m_2+\ldots m_n),$$

aus welcher sogleich nachstehende folgt:

$$38.\quad \begin{cases} 2a_{n-1}a_n+a_n^2\,(x_1+x_2\ldots+x_n+m_1+m_2+\ldots m_n) \\ =b^2[A_{2n-1}+A_{2n}(x_1+x_2\ldots+x_n+m_1+m_2+\ldots m_n). \end{cases}$$

Erhebt man jede der Gleichungen (35.) und (36.) aufs Quadrat, so giebt die Differenz der Quadrate auf den linken Seiten

$$[2a_{n-1}a_n+a_n^2(x_1+x_2+\ldots x_n+m_1+m_2+\ldots m_n)]$$
$$\times[x_1+x_2\ldots+x_n-m_1-m_2\ldots-m_n].$$

Man erhält hiernach, mit Hinzuziehung der Gleichung (38.),

$$[A_{2n-1}+A_{2n}(x_1+x_2+\ldots x_n+m_1+m_2\ldots+m_n)]$$
$$\times[x_1+x_2\ldots+x_n-m_1-m_2\ldots-m_n]$$
$$=\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\ldots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right\}^2-\left\{\frac{\sqrt{(fm_1)}}{F'm_1}+\frac{\sqrt{(fm_2)}}{F'm_2}+\ldots+\frac{\sqrt{(fm_n)}}{F'm_n}\right\}^2.$$

Hieraus ersieht man sogleich, dafs der Ausdruck

$$\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\ldots\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right\}^2-A_{2n-1}(x_1+x_2+\ldots x_n)$$
$$-A_{2n}(x_1+x_2+\ldots x_n)^2$$

einer ähnlichen Function von den Gröfsen m gleich, also constant sein mufs; was eben die Gleichung (26.) aussagte. Eben so leitet man die Gleichung (29.) ab.

§. 6.

Während in §. 5. nicht das vollständige System von Integralgleichungen, wodurch das System Differentialgleichungen (30.) integrirt wird, sondern nur zwei derselben abgeleitet sind, werde ich im Folgenden die $(n-1)$ In-

tegralgleichungen des vollständigen Systems mittheilen; und zwar in solcher Form, dafs in jeder derselben eine der $(n-1)$ willkürlichen Constanten, und diese abgesondert vorkommt. Hieraus wird sich dann auch sogleich die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung (28.) ergeben.

Indem ich die Annahme des vorigen §. benutze, nehme ich nur noch an, dafs fx die Factoren $(x-\alpha_0)$, $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ... $(x-\alpha_{n-1})$ enthalte, und aufserdem, da fx vom $2n$ten Grade ist, noch einen Factor Πx vom $n$ten Grade. Ich setze aufserdem $m_1=\alpha_0$ und der Kürze wegen

$$39. \quad \begin{cases} Fx = (x-\alpha_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots.(x-x_n, \\ \mathrm{P}x = (x-m_2)(x-m_3)\dots.(x-m_n), \\ b\Phi x = a_0+a_1x\dots.+a_nx^n. \end{cases}$$

Man erhält alsdann aus den $n+1$ ersten der Gleichungen (32.)

$$40. \quad \Phi x = Fx\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}.\frac{1}{x-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2}}{F'x_2}\,\frac{1}{x-x_2}+\dots.\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}.\frac{1}{x-x_n}\right\},$$

und hieraus

$$41. \quad \frac{a_n}{b} = \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\dots.\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}.$$

Nun giebt die Gleichung (37.), da x_1, x_2, ... x_n, α_0, m_2, ... m_n ihre Wurzeln sind, folgende Formel, wenn die obigen Zeichen angewendet werden:

$$(\Phi x)^2-\Pi x.(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots.(x-\alpha_{n-1}) = \left[\left(\frac{a_n}{b}\right)^2-A_{2n}\right]Fx.\mathrm{P}x.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$, ... $x=\alpha_{n-1}$, so erhält man nach leichten Reductionen, indem man die Gleichungen (40.) und (41.) benutzt, folgende Formeln:

$$42. \quad \begin{cases} F\alpha_1\dfrac{\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}.\frac{1}{\alpha_1-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}.\frac{1}{\alpha_1-x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}.\frac{1}{\alpha_1-x_n}\right\}^2}{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2-A_{2n}} = \mathrm{P}\alpha_1, \\ F\alpha_2\dfrac{\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}.\frac{1}{\alpha_2-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F(x_2)}.\frac{1}{\alpha_2-x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}.\frac{1}{\alpha_2-x_n}\right\}^2}{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2-A_{2n}} = \mathrm{P}\alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F\alpha_n\dfrac{\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}.\frac{1}{\alpha_{n-1}-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}.\frac{1}{\alpha_{n-1}-x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}.\frac{1}{\alpha_{n-1}-x_n}\right\}^2}{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\dots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2-A_{2n}} = \mathrm{P}\alpha_{n-1}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen, welche nach dem obigen Satze die endlichen Integralgleichungen des Systems Differentialgleichungen (31.) sind, stehen auf der linken Seite nur Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_n$ und der gegebenen Gröfsen von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots. \alpha_{n-1}$, so wie der Coëfficienten von fx: auf der rechten Seite hingegen stehen nur Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{n-1}$ und den Constanten $m_2, m_3, \ldots. m_n$, so dafs die $n-1$ willkürlichen Constanten der $n-1$ Integralgleichungen, in jeder eine, abgesondert erscheinen. Man kann daher folgendes Theorem feststellen.

„Wenn die ganze rationale Function vom $2n$ten Grade fx, für „$x = \alpha_0$ und $x = \alpha_h$, verschwindet, so wird das System Differentialgleichun„gen (31.) durch das System endlicher Gleichungen integrirt, welche man „erhält, wenn man in der Gleichung

$$„F\alpha_h \frac{\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\cdot\frac{1}{\alpha_h-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\cdot\frac{1}{\alpha_h-x_2}+\ldots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\cdot\frac{1}{\alpha_h-x_n}\right\}^2}{\left(\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}+\ldots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\right)^2-A_{2n}} = C_h$$

„statt α_h, $n-1$ Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ substituirt." Oder „die „allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$„\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\ldots.+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0$$

„ist eine willkürliche Function der $n-1$ Ausdrücke, welche auf der lin„ken Seite jener $n-1$ Gleichungen stehen."

Der Herr Prof. *Jacobi* hat im 19ten Bande des gegenw. Journals Seite 313 angekündigt, dafs sich ihm bei einer mechanischen Aufgabe ein einfacher Weg dargeboten habe, von einem solchen System Differentialgleichungen durch Anwendung passender Multiplicatoren zu ihren algebraischen Integralgleichungen zu gelangen. Da nun meine obigen Gleichungen (42.) eine solche Form haben, dafs die $n-1$ willkürlichen Constanten abgesondert in ihnen vorkommen, so kann man nach bekannten Regeln $n-1$ solche Multiplicatoren aus jeder ableiten, mit denen die Differentialgleichungen (31.) multiplicirt werden müssen, damit ihre Summe ein exactes Differential werde. Die Ausführung dieser Operation und die daraus sich ergebende vollständige directe Integration des gegebenen Systems (31.) werde ich, so wie die unzähligen Folgerungen aus dieser Darstellung des *Abel*schen Theorems, hier nicht mehr mittheilen; statt dessen aber einen besondern Fall noch hervorheben, in welchem diese Formeln sich sehr vereinfachen. Ich meine den Fall, wenn $A_{2n} = 0$ ist. Die daraus entstehende

Form der Function fx umfafst diejenige, auf welche ich im 12ten Bande des gegenw. Journals, Seite 210 dieselbe reducirt habe, sobald sie in lauter reelle Factoren vom ersten Grade zerlegt werden kann. Man kann stets, sobald die Function fx zwei reelle Factoren vom ersten Grade enthält, die Untersuchung auf den Fall reduciren, dafs fx von einem ungeraden Grade ist. Dieser Grad ist auch, nach einer mir jetzt vom Herrn Professor *Jacobi* gemachten Mittheilung, gerade der aus seinen Betrachtungen sich ergebende. Nehme ich noch dazu $m_1 = \alpha_0 = \infty$ an, so erhalte ich folgende Gleichung für das *Abel*sche Theorem an Stelle der Gleichung (37.):

43. $$(a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1})^2 - b_0^2 (A_0 + A_1 x + \dots + A_{2n-1} x^{2n-1}) = 0.$$

Setze ich jetzt

44. $$\begin{cases} Fx = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \\ \mathrm{P}x = (x-m_2)(x-m_3)\dots(x-m_n), \\ b\varphi x = a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1}, \end{cases}$$

wo $x_1, x_2, \dots x_n, m_2, \dots m_n$ die $2n-1$ Wurzeln der Gleichung (43.) sind, so erhalte ich

45. $$\varphi x = Fx \left\{ \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \dots \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n} \cdot \frac{1}{x-x_n} \right\}.$$

Wenn nun (46.) $fx = A_0 + A_1 x + \dots + A_{2n-1} x^{2n-1}$ für $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ... $x = \alpha_{n-1}$ verschwindet, so kann man wieder aus der Gleichung (43.) folgende identische Gleichung ableiten:

$$(\varphi x)^2 - (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n-1})\,\Pi x = -A_{2n-1}(Fx)\,\mathrm{P}x.$$

Setzt man hierin statt x der Reihe nach die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$, so erhält man, mit Hinzuziehung der Gleichung (45.), folgende sehr elegante Formeln:

$$F\alpha_1 \left\{ \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1-x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \cdot \frac{1}{\alpha_1-x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n} \cdot \frac{1}{\alpha_1-x_n} \right\}^2 = -A_{2n-1}\,\mathrm{P}\alpha_1,$$

$$F\alpha_2 \left\{ \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} \cdot \frac{1}{\alpha_2-x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2-x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n} \cdot \frac{1}{\alpha_2-x_n} \right\}^2 = -A_{2n-1}\,\mathrm{P}\alpha_2,$$

. . . .

$$F\alpha_{n-1} \left\{ \frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-1}-x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-1}-x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-1}-x_n} \right\}^2 = -A_{2n-1}\,\mathrm{P}\alpha_{n-1},$$

welche ich als die Fundamental-Formeln in der Theorie der Addition der

*Abel*schen Transcendenten stets bisher in meinen Untersuchungen benutzt habe.

Zugleich ergiebt sich hieraus endlich folgendes Theorem.

„Wenn die ganze rationale Function fx von dem Grade $2n-1$, „für $x=a_h$ verschwindet, so wird das System Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0,$$

$$\frac{x_1\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{x_2\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{x_n\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}\partial x_1}{\sqrt{(fx_1)}}+\frac{x_2^{n-2}\partial x_2}{\sqrt{(fx_2)}}+\dots+\frac{x_n^{n-2}\partial x_n}{\sqrt{(fx_n)}}=0,$$

„vollständig integrirt durch das System endlicher Gleichungen, welche man „aus der Gleichung

$$\sqrt{(Fa_h)}\left\{\frac{\sqrt{(fx_1)}}{F'x_1}\cdot\frac{1}{a_h-x_1}+\frac{\sqrt{(fx_2)}}{F'x_2}\cdot\frac{1}{a_h-x_2}+\dots+\frac{\sqrt{(fx_n)}}{F'x_n}\cdot\frac{1}{a_h-x_n}\right\}=C_h,$$

„erhält, wenn man statt a_h, $n-1$ Wurzeln der Gleichung $fx=0$, setzt, „durch Fx den Ausdruck

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

„und durch C_h die willkürliche Constante bezeichnet."

Königsberg am 23sten April 1842.

16.

Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Gleichungen.

(Von dem Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

Der folgende Beweis des Satzes, dafs jede ganze rationale algebraische Function einer Veränderlichen sich in reelle Factoren vom ersten und zweiten Grade zerlegen läfst, beruht auf demselben Grundgedanken, wie der bekannte Beweis, den *Cauchy* in seinem *cours d'analyse* vorgetragen hat; er scheint mir aber einfacher zu sein und sich besonders zur Aufnahme in die Elemente der Algebra zu eignen.

Sei die Gleichung

$$Fx = x^t + Ax^{t-1} + \ldots . = 0$$

gegeben. Setzt man für x irgend einen Werth $p+q\sqrt{-1}$, wo p und q endliche reelle Werthe sind, so geht Fx in $P+Q\sqrt{-1}$ über. Unter den verschiedenen Werthen die P und Q erhalten, je nachdem p und q andere Werthe annehmen, wird es ein Paar zusammengehörender Werthe von P und Q geben, für welche der Modulus P^2+Q^2 ein Minimum wird. Es soll nun bewiesen werden, dafs in diesem Falle nothwendig P und Q beide Null sind.

Sei $p+q\sqrt{-1}$ der Werth von x, für welchen P^2+Q^2 ein Minimum wird, und sei nicht zu gleicher Zeit $P=0$ und $Q=0$. Man kann zu mehrerer Einfachheit annehmen, dafs Q positiv ist, da man im entgegengesetzten Falle nur $-q$ statt q zu setzen braucht. Man setze nun $p+m$ statt p und $q+n$ statt q, so erhält man, wenn man nach Potenzen von $m+n\sqrt{-1}$ ordnet,

$$F(p+q\sqrt{-1}+m+n\sqrt{-1}) =$$
$$P+Q\sqrt{-1}+(m+n\sqrt{-1})^r(P'+Q'\sqrt{-1})+(m+n\sqrt{-1})^{r+1}(P''+Q''\sqrt{-1})+\ldots,$$

wo $r=1$ oder >1 ist und P', Q', P'', Q'', ... reelle Gröfsen sind, die nicht von m und n abhängen. Nun kann man m und n so klein annehmen, dafs die Glieder, welche mit höheren Potenzen von $m+n\sqrt{-1}$ multiplicirt sind, gegen das erste, welches die r^{te} Potenz enthält, sehr un-

bedeutend werden. Oder mit andern Worten, wenn man $m+n\sqrt{-1} = \sqrt[r]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$ setzt, wo α und β noch unbestimmte Zahlen sind, und die Summe der Glieder

$$(m+n\sqrt{-1})^{r+1}(P''+Q''\sqrt{-1})+(m+n\sqrt{-1})^{r+2}(P'''+Q'''\sqrt{-1})\ldots$$

durch $a+b\sqrt{-1}$ bezeichnet, wodurch man

$$F(p+q\sqrt{-1}+m+n\sqrt{-1}) = P+\alpha P'-\beta Q'+a+(Q+\alpha Q'+\beta P'+b)\sqrt{-1}$$

erhält, so kann man immer α und β so klein annehmen, dafs die Werthe von a und b auf das Zeichen der Ausdrücke $\alpha P'-\beta Q'+a$, $\alpha Q'+\beta P'+b$ keinen Einflufs haben, diese Ausdrücke mithin positiv oder negativ werden, je nachdem $\alpha P'-\beta Q'$ und $\alpha Q'+\beta P'$ positiv oder negativ sind. Zugleich können α und β so klein angenommen werden, dafs das Zeichen von $P+\alpha P'-\beta Q'$ mit dem Zeichen von P, das Zeichen von $Q+\alpha Q'+\beta P'$ mit dem Zeichen von Q übereinstimmt. Setzt man nun $P+\alpha P'-\beta Q'+a=R$, $Q+\alpha Q'+\beta P'+b = S$, so ist leicht zu zeigen, dafs, sobald P und Q nicht Null sind, die Werthe von α und β so gewählt werden können, dafs $R<P$, $S<Q$, mithin der Modulus R^2+S^2 kleiner als der Modulus P^2+Q^2 ist; gegen die Voraussetzung. Denn man gebe α das entgegengesetzte Zeichen von Q' und β das entgegengesetzte Zeichen von P', so ist $\alpha Q'+\beta P'$ negativ, also $S<Q$. Setzt man nun ferner, je nachdem P positiv oder negativ ist, die Zahlenwerthe von α und β so, dafs der Werth von $\alpha P'-\beta Q'$ negativ oder positiv wird *), so ist auch $P+\alpha P'-\beta Q'<P$ und mithin $R<P$.

Im Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, dafs P und Q beide nicht Null werden. Der Beweis bliebe derselbe, wenn man annehmen wollte, dafs nur eine dieser Gröfsen, z. B. P, Null würde. Denn in diesem Falle hätte man $R=\alpha P'-\beta Q'+a$, $S=Q+\alpha Q'+\beta P'+b$.

Dafs aber der Modulus $[\alpha P'-\beta Q'+a]^2+[Q+\alpha Q'+\beta P'+b]^2$ kleiner als Q^2 ist, erhellt daraus, dafs in der Entwicklung dieses Ausdrucks

$$Q^2+2Q(\alpha Q'+\beta P'+b)+(\alpha Q'+\beta P'+b)^2+(\alpha P'-\beta Q'+a)^2$$

das Glied $2Q(\alpha Q'+\beta P'+b)$ negativ wird und sein Zahlenwerth, nach dem Vorhergehenden, den Werth der folgenden Glieder übertrifft. (Oct. 1841.)

---

*) Der Ausdruck $\alpha P'-\beta Q'$ enthält nemlich immer ein positives und ein negatives Glied. Denn haben P' und Q' gleiche, also α und β die entgegengesetzten Zeichen, so ist $-\beta Q'$ positiv und $\alpha P'$ negativ. Haben P' und Q' entgegengesetzte Zeichen, so hat α gleiches Zeichen mit P' und β gleiches Zeichen mit Q', also ist $\alpha P'$ positiv und $-\beta Q'$ negativ. Man hat daher α und β nur so zu nehmen, dafs nach Umständen das positive oder das negative Glied den gröfsten Zahlenwerth hat.

17.

Note sur une propriété des équations différentielles linéaires à deux variables.

(Par Mr. *C. Ramus* de Copenhague.)

L'équation différentielle linéaire à deux variables x et y,

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots + P_n y = Q$$

étant proposée il s'agit d'en trouver une intégrale première. On l'obtient en écrivant

$$2. \quad \varphi \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \varphi_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \varphi_2 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \dots + \varphi_{n-1} y = \int \varphi Q \, dx;$$

car en différentiant celle-ci, on retrouve l'équation (1.), pourvu que φ, φ_1, φ_2, ... φ_{n-1} soient soumises aux conditions suivantes:

$$\varphi' + \varphi_1 = P_1 \varphi, \quad \varphi_1' + \varphi_2 = P_2 \varphi, \quad \varphi_2' + \varphi_3 = P_3 \varphi, \quad \dots$$
$$\varphi_{n-2}' + \varphi_{n-1} = P_{n-1} \varphi, \quad \varphi_{n-1}' = P_n \varphi,$$

partant

$$3. \quad \begin{cases} \varphi_1 = P_1 \varphi - \varphi', \\ \varphi_2 = P_2 \varphi - \frac{d.P_1 \varphi}{dx} + \varphi'', \\ \varphi_3 = P_3 \varphi - \frac{d.P_2 \varphi}{dx} + \frac{d^2.P_1 \varphi}{dx^2} - \varphi''', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{n-1} = P_{n-1} \varphi - \frac{d.P_{n-2} \varphi}{dx} + \frac{d^2.P_{n-3} \varphi}{dx^2} \dots \\ \qquad \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}.P_1 \varphi}{dx^{n-2}} + (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}, \\ P_n \varphi = \frac{d.P_{n-1} \varphi}{dx} - \frac{d^2.P_{n-2} \varphi}{dx^2} + \frac{d^3.P_{n-3} \varphi}{dx^3} \dots \\ \qquad \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-1}.P_1 \varphi}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-1} \varphi^{(n)}. \end{cases}$$

Cette dernière équation, qui sert à faire trouver φ, est linéaire de l'ordre n et de la forme

$$4. \quad \frac{d^n z}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \dots + P_n z = 0,$$

mais avec des coëfficiens différents de P_1, P_2, ... P_n, qui se trouvent dans (1.), savoir

$$5.\quad \frac{d^n\varphi}{dx^n} - P_1\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} \begin{array}{r|} + P_2 \\ -\frac{n-1}{1}\cdot\frac{dP_1}{dx} \end{array} \frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} \begin{array}{r|} - P_3 \\ +\frac{n-2}{1}\cdot\frac{dP_2}{dx} \\ -\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{d^2P_1}{dx^2} \end{array} \frac{d^{n-3}\varphi}{dx^{n-3}} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r|} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}P_{n-1} \\ +(-1)^{n-2}\frac{2}{1}\cdot\frac{dP_{n-2}}{dx} \\ +(-1)^{n-3}\frac{3}{1}\cdot\frac{d^2P_{n-3}}{dx^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ -\frac{n-1}{1}\cdot\frac{d^{n-2}P_1}{dx^{n-2}} \end{array} \frac{d\varphi}{dx} \quad \begin{array}{r|} +(-1)^nP_n \\ +(-1)^{n-1}\frac{dP_{n-1}}{dx} \\ +(-1)^{n-2}\frac{d^2P_{n-2}}{dx^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ +\frac{d^{n-2}P_2}{dx^{n-2}} \\ -\frac{d^{n-1}P_1}{dx^{n-1}} \end{array} \varphi \right\} = 0.$$

Soient

$$6.\quad \varphi = u_1,\quad \varphi = u_2,\quad \varphi = u_3,\ \ldots\ \varphi = u_n$$

des intégrales particulières satisfaisant à l'équation (5.). A chacune de celles-ci correspond une intégrale première de l'équation (1.), exprimée par (2.), φ_1, φ_2, ... φ_{n-1} étant déterminés par les formules (3). De ces intégrales, en éliminant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, on obtient l'expression générale de y ou l'intégrale complète, supposant toutefois que deux quelconques des fonctions u_1, u_2, ... u_n ne soient pas entre elles dans un rapport constant. Cette expression générale de y est évidemment une fonction symétrique de u_1, u_2, ... u_n, et par la permutation des coëfficiens du premier membre de (2.), φ_{n-1}, φ_{n-2}, ... φ, on peut en tirer des expressions symétriques analogues à $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Si l'on peut trouver une intégrale particulière $y = z$ de l'équation (2.), quel que soit φ, en sorte que z soit une fonction généralement exprimée en φ, P_1, P_2, ... P_n, Q, l'équation (1.), en faisant $y = z$, se transforme immédiatement en l'équation (5.). C'est ce qu'il est facile à vérifier pour le cas $n = 2$; car, en faisant

$$7.\quad y = e^{-\int P_1 dx}\varphi\int\frac{e^{\int P_1 dx}}{\varphi^2}(\int\varphi Q dx)\,dx,$$

l'équation

$$8.\quad \frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2 y = Q$$

se transforme en

$$9.\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}-P_1\frac{d\varphi}{dx}+\left(P_2-\frac{dP_1}{dx}\right)\varphi = 0.$$

L'équation (5.) a cette propriété remarquable, qu'étant transformée de la même manière, dont on l'a dérivée de (1.), elle donne une nouvelle transformée, qui se ramène à (4.); ce qui fournit une nouvelle démonstration du theorème de *Lagrange*. Comme corollaire on peut remarquer la substitution suivante, qui dans le cas $n=2$ réduit immédiatement (1.) à (4.):

$$\begin{cases} y = e^{-\int P_1 dx}\varphi\int\frac{e^{\int P_1 dx}}{\varphi^2}(\int\varphi Q dx)\,dx, \\ \varphi = e^{\int P_1 dx} z, \end{cases}$$

ou bien

$$10.\quad y = z\int\frac{e^{-\int P_1 dx}}{z^2}(\int e^{\int P_1 dx} z Q dx)\,dx.$$

En effet cette expression étant substituée dans (8.), on trouve

$$11.\quad \frac{d^2z}{dx^2}+P_1\frac{dz}{dx}+P_2 z = 0.$$

Cette dernière équation restant la même, si à z on substitue $z\int\frac{e^{-\int P_1 dx}}{z^2}dx$, ses deux intégrales particulières

$$z = z_1,\quad z = z_2,$$

ont la propriété de se reproduire l'une par l'autre comme il suit:

$$z_2 = z_1\int\frac{e^{-\int P_1 dx}}{z_1^2}dx,\qquad z_1 = z_2\int\frac{e^{-\int P_1 dx}}{z_2^2}dx.$$

Ces deux formules satisfont évidemment à l'expression symmétrique de P_1, c'est-à-dire à l'équation $z_1\left(\frac{d^2z_2}{dx^2}+P_1\frac{dz_2}{dx}\right) = z_2\left(\frac{d^2z_1}{dx^2}+P_1\frac{dz_1}{dx}\right)$ qu'on trouve en éliminant P_2 des deux équations $\frac{d^2z_1}{dx^2}+P_1\frac{dz_1}{dx}+P_2 z_1 = 0$, $\frac{d^2z_2}{dx^2}+P_1\frac{dz_2}{dx}+P_2 z_2 = 0$.

Dans un seul cas la reduction de l'équation (1.) est facile et se présente d'elle même. C'est lorsque $\frac{Q}{P_n} = a$ est une quantité constante. Alors on n'a qu'à faire $y = a+z$.

23 avril 1842.

18.

Ueber die Bedingung, dafs fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

(Von dem Herrn Dr. *Luchterhand* zu Königsberg in der Neumark.)

Die rechtwinkligen Coordinaten der fünf gegebenen Puncte seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4; x_5, y_5, z_5. Die Gleichung der Kugelfläche, auf welcher diese Puncte liegen, sei

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

wo a, b, c, r die zu bestimmenden Gröfsen sind. Man hat alsdann folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2 &= r^2,\\
(x_2-a)^2+(y_2-b)^2+(z_2-c)^2 &= r^2,\\
(x_3-a)^2+(y_3-b)^2+(z_3-c)^2 &= r^2,\\
(x_4-a)^2+(y_4-b)^2+(z_4-c)^2 &= r^2,\\
(x_5-a)^2+(y_5-b)^2+(z_5-c)^2 &= r^2.
\end{aligned}$$

Da nun schon vier dieser Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunctes und des Radius hinreichen, so wird die fünfte Gleichung zur Auffindung der Bedingung dienen, unter welcher die Kugel, die durch 4 Puncte geht, auch den fünften enthält. Abstrahirt man vorläufig von dem Puncte (x_5, y_5, z_5) und bestimmt aus den vier ersten Bedingungsgleichungen die Coordinaten a, b, c, so findet man dafür folgende Werthe:

$$a=\frac{M}{2N};\quad b=-\frac{M_1}{2N},\quad c=\frac{M_2}{2N},$$

wo M, M_1, M_2 und N folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned}
M = {} & (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\{y_2(z_3-z_4)+y_3(z_4-z_2)+y_4(z_2-z_3)\}\\
& + (x_2^2+y_2^2+z_2^2)\{y_1(z_4-z_3)+y_3(z_1-z_4)+y_4(z_3-z_1)\}\\
& + (x_3^2+y_3^2+z_3^2)\{y_1(z_2-z_4)+y_2(z_4-z_1)+y_4(z_1-z_2)\}\\
& + (x_4^2+y_4^2+z_4^2)\{y_1(z_3-z_2)+y_2(z_1-z_3)+y_3(z_2-z_1)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1 = &(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\{x_2(z_3-z_4)+x_3(z_4-z_2)+x_4(z_2-z_3)\}\\ &+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\{x_1(z_4-z_3)+x_3(z_1-z_4)+x_4(z_3-z_1)\}\\ &+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)\{x_1(z_2-z_4)+x_2(z_4-z_1)+x_4(z_1-z_2)\}\\ &+(x_4^2+y_4^2+z_4^2)\{x_1(z_3-z_2)+x_2(z_1-z_3)+x_3(z_2-z_1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 = &(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\{x_2(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_2-y_3)\}\\ &+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\{x_1(y_4-y_3)+x_3(y_1-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}\\ &+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)\{x_1(y_2-y_4)+x_2(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_2)\}\\ &+(x_4^2+y_4^2+z_4^2)\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N = &\,x_1\{y_2(z_3-z_4)+y_3(z_4-z_2)+y_4(z_2-z_3)\}\\ &+x_2\{y_1(z_4-z_3)+y_3(z_1-z_4)+y_4(z_3-z_1)\}\\ &+x_3\{y_1(z_2-z_4)+y_2(z_4-z_1)+y_4(z_1-z_2)\}\\ &+x_4\{y_1(z_3-z_2)+y_2(z_1-z_3)+y_3(z_2-z_1)\}\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunctes derjenigen Kugel welche durch die drei ersten und den fünften Punct geht, erhält man die entsprechenden Werthe aus den obigen für M, M_1, M_2 und N entwickelten ganz einfach dadurch, dafs man überall statt des Index 4 den Index 5 setzt. Die daraus hervorgehenden Werthe mögen durch M', M'_1, M'_2 und N' bezeichnet werden.

Sollen nun die Mittelpuncte dieser beiden Kugeln zusammenfallen, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$\frac{M}{N}=\frac{M'}{N'};\quad \frac{M_1}{N}=\frac{M'_1}{N'};\quad \frac{M_2}{N}=\frac{M'_2}{N'}.$$

Substituirt man in diesen Gleichungen für M, M_1 u. s. w. ihre Werthe und macht die gehörigen Reductionen, so führen sie auf eine und dieselbe Relation zwischen den Coordinaten der fünf gegebenen Puncte, und es spricht dieselbe analytisch die Bedingung aus, unter welcher diese fünf Puncte auf derselben Kugelfläche liegen. Diese Bedingungsgleichung ist nun folgende:

$$\begin{aligned}&(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\left\{\begin{aligned}&x_2[y_3(z_5-z_4)+y_4(z_3-z_5)+y_5(z_4-z_3)]\\ &+x_3[y_2(z_4-z_5)+y_4(z_5-z_2)+y_5(z_2-z_4)]\\ &+x_4[y_2(z_5-z_3)+y_3(z_2-z_5)+y_5(z_3-z_2)]\\ &+x_5[y_2(z_3-z_4)+y_3(z_4-z_2)+y_4(z_2-z_3)]\end{aligned}\right\}\\ &+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\left\{\begin{aligned}&x_1[y_3(z_4-z_5)+y_4(z_5-z_3)+y_5(z_3-z_4)]\\ &+x_3[y_1(z_5-z_4)+y_4(z_1-z_5)+y_5(z_4-z_1)]\\ &+x_4[y_1(z_3-z_5)+y_3(z_5-z_1)+y_5(z_1-z_3)]\\ &+x_5[y_1(z_4-z_3)+y_3(z_1-z_4)+y_4(z_3-z_1)]\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

$$+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)\left\{\begin{array}{l} \quad x_1[y_2(z_5-z_4)+y_4(z_2-z_5)+y_5(z_4-z_2)] \\ +x_2[y_1(z_4-z_5)+y_4(z_5-z_1)+y_5(z_1-z_4)] \\ +x_4[y_1(z_5-z_2)+y_2(z_1-z_5)+y_5(z_2-z_1)] \\ +x_5[y_1(z_2-z_4)+y_2(z_4-z_1)+y_4(z_1-z_2)] \end{array}\right\}$$

$$+(x_4^2+y_4^2+z_4^2)\left\{\begin{array}{l} \quad x_1[y_2(z_3-z_5)+y_3(z_5-z_2)+y_5(z_2-z_3)] \\ +x_2[y_1(z_5-z_3)+y_3(z_1-z_5)+y_5(z_3-z_1)] \\ +x_3[y_1(z_2-z_5)+y_2(z_5-z_1)+y_5(z_1-z_2)] \\ +x_5[y_1(z_3-z_2)+y_2(z_1-z_3)+y_3(z_2-z_1)] \end{array}\right\}$$

$$+(x_5^2+y_5^2+z_5^2)\left\{\begin{array}{l} \quad x_1[y_2(z_4-z_3)+y_3(z_2-z_4)+y_4(z_3-z_2)] \\ +x_2[y_1(z_3-z_4)+y_2(z_4-z_1)+y_4(z_1-z_3)] \\ +x_3[y_1(z_4-z_3)+y_2(z_1-z_4)+y_4(z_2-z_1)] \\ +x_4[y_1(z_2-z_3)+y_2(z_3-z_1)+y_3(z_1-z_2)] \end{array}\right\}$$

$$= 0.$$

Dies Resultat ist nun geometrisch zu deuten. Der gefundene Ausdruck stellt sich als eine Summe von fünf Producten aus zwei Factoren dar; jeder erste Factor ist aber augenscheinlich nichts anderes, als das Quadrat der Entfernung eines der fünf Puncte von dem (beliebigen) Anfangspuncte der Coordinaten. Die geometrische Bedeutung der fünf zweiten Factoren ist gleichfalls leicht zu erkennen. Abgesehen vom Zeichen, sind diese fünf Factoren nichts anderes, als die Ausdrücke für den sechsfachen Inhalt der 5 dreiseitigen Pyramiden, welche von je vier der gegebenen fünf Puncte gebildet werden. Eine leicht anzustellende Betrachtung lehrt aber, dafs das Zeichen von drei dieser Factoren gleich und dem Zeichen der beiden andern Factoren entgegengesetzt ist. Denkt man sich nun noch die obige Bedingungsgleichung durch die Zahl 6 dividirt, und erinnert sich zugleich, dafs der Anfangspunct der Coordinaten ganz willkürlich ist, so hat man folgenden Satz:

Wenn fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel gelegen sind, so haben die fünf Pyramiden, welche durch je vier der Puncte bestimmt werden, die Eigenschaft, dafs, wenn man den Inhalt jeder solcher Pyramide mit dem Quadrate der Entfernung des jedesmal übrig bleibenden fünften Punctes von einem beliebigen sechsten multiplicirt, die Summe von dreien dieser Producte gleich der Summe der beiden andern ist.

Anmerkung. Der entsprechende Satz für die Ebene ist folgender:

Wenn vier Puncte in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist die Summe der Producte der beiden Dreiecke, welche an der einen Diagonale liegen, jedes Dreieck multiplicirt mit dem Quadrate der Entfernung des übrig bleibenden vierten Punctes von einem beliebigen fünften Puncte, gleich der Summe der beiden an der andern Diagonale liegenden Dreiecke, jedes multiplicirt mit dem Quadrate der Entfernung des vierten Punctes von demselben fünften Puncte.

Königsberg i. d. Neumark, am 7ten Februar 1841.

Druckfehler und Berichtigungen.

Band 22. S. 4 Z. 3 v. u. l. 68 st. 6.8.
— 19 letzte Zeile l. a st. α
— 20 Z. 2 l. a st. α
— — — 11 l. α st. a
— 21 — 7 l. a st. α
— — — 4 l. Zeichenwechsel st. Zwischenwechsel
— 22 — 9 v. u. l. mehr st. mehre
— 40 — 5 v. u. l. $F^{x1}x$ st. $f'x$
— 44 — 13 v. o. l. $<$ st. $>$
— 52 — 1 v. o. l. f^{n+s} st. f^{a+s}
— 59 — 13 v. u. l. welches eine st. welche seine

Von dem Lehrsatz 2. im 4ten Hefte 18ten Bandes S. 375 schreibt der Herr Verfasser desselben, der Satz sei nicht richtig ausgedrückt. Er werde später mehr über diesen Gegenstand mittheilen.

Der Herr Verfasser der Abhandlung No. 9. im 3ten Heft 23sten Bandes (S. 242) schreibt dem Herausgeber, es komme in dieser Abhandlung ein Versehen vor: zwei projectivisch ähnliche Grade, welche sich decken, bildeten nie ein Involutions-System, und zwei gleiche Grade nur dann, wenn sie ungleich lägen; man überzeuge sich hiervon aus den harmonischen Eigenschaften der doppelten Puncte. Dafs der Verfasser dieses Versehen nicht schon früher bemerkt habe, liege darin, dafs ihm die Abschrift der Abhandlung verloren gegangen sei.

Das am 26. April d. J. erfolgte Ableben des Chefs der Verlagsbuchhandlung dieses Journals, Herrn Buchhändler und Stadtrath G. Reimer, wird auf die Fortsetzung der Schrift keinen Einfluss haben. Sie wird fortgehen, so lange sich sonst keine Hindernisse dagegen finden. Leider verliert der Herausgeber an dem zu früh Verstorbenen einen aufrichtigen und lang bewährten Freund! Seit vollen 40 Jahren stand er zu ihm in freundschaftlichem Verhältniss und in dem eines Schriftstellers zum Verlagshändler. Bei weitem das Meiste von Allem, was der Herausgeber durch den Druck bekannt machte, hat die Buchhandlung des Verstorbenen verlegt, und nie hatte er irgend einen Anlass zum Missvergnügen gegen ihn. Im Gegentheil verdankt er ihm vielfältige Gefälligkeiten und manche Förderung und Erleichterung seiner schriftstellerischen Bestrebungen. Reimer war ein sehr wackerer, ehrenhafter Mann, ein Mann von Wort und Treue.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XIII. Heft 4.

Fac-simile der Handschrift von Daniel Bernoulli.

Aus dem Jahre 1734.

Aus einem seiner Briefe an L. Euler.

Hochedelgebohrner
Hochgelehrter Hl. Professor

Ihro HEdelgeb. Schreiben vom 25. may hab ich wohl empfangen [illegible]

[illegible] Hl. Schumachers [illegible]

[illegible] Bibliothecario [illegible] Hl. Director recommendiren [illegible]

[illegible] Baron von [illegible]

[illegible] Hl. von Korff [illegible] gratulations [illegible]

[illegible] Academie [illegible] Directeur [illegible] etc.

Daniel Bernoulli

X'

C'

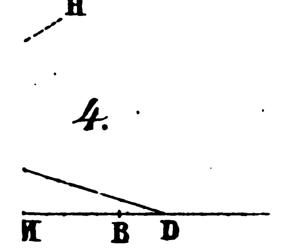
A'

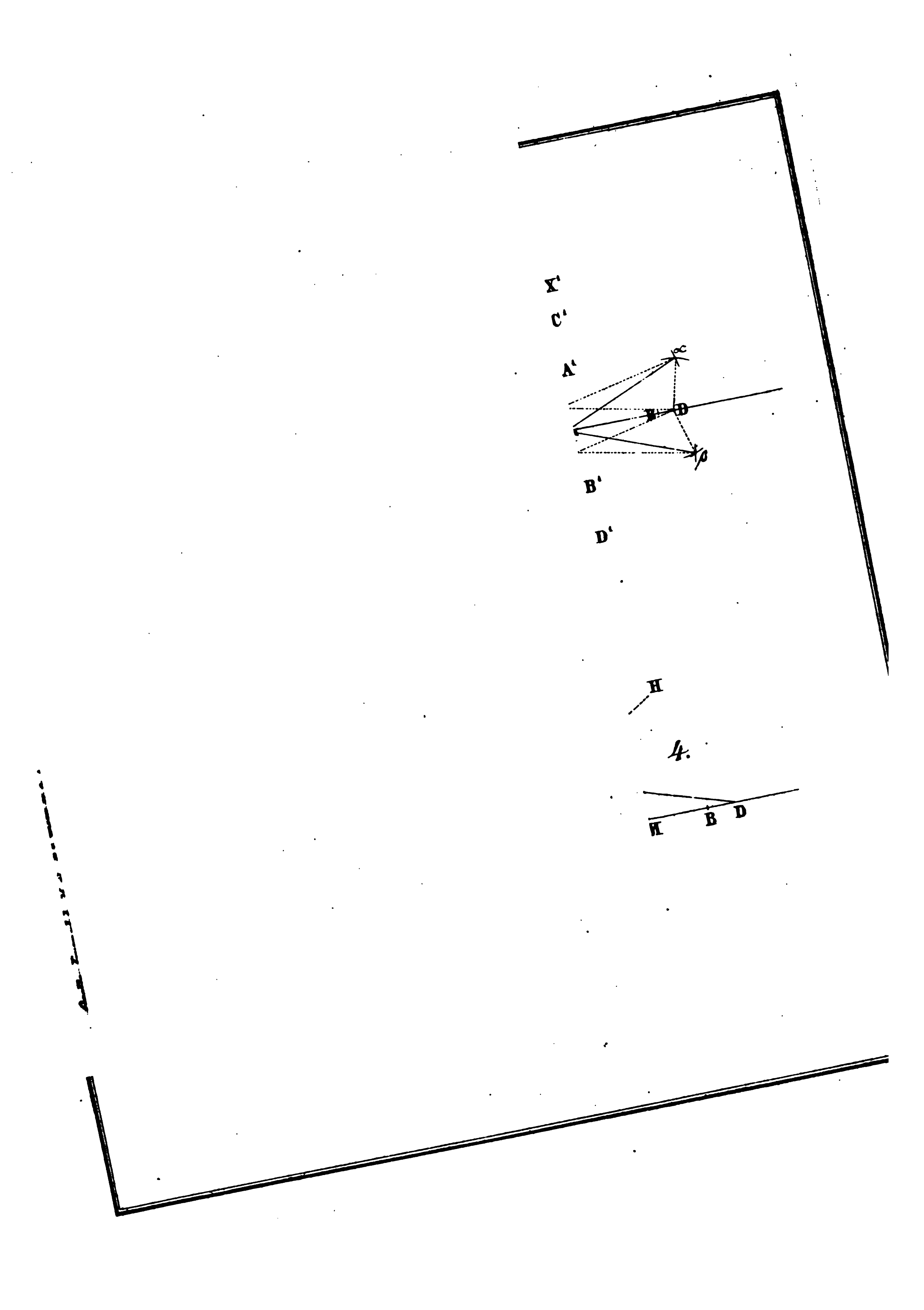
B D

B'

D'






X'
C'
A'
B'
D'
H
4.
H
B
D

